LICENCIATURA EM

MATEMÁTICA

3ª edição

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA

FTC
FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

ead
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

FUNDAMENTOS
DE
GEOMETRIA

SOMESB

Sociedade Mantenedora de Educação Superior da Bahia S/C Ltda.

Presidente	♦	Gervásio Meneses de Oliveira
Vice-Presidente	♦	William Oliveira
Superintendente Administrativo e Financeiro	♦	Samuel Soares
Superintendente de Ensino, Pesquisa e Extensão	♦	Germano Tabacof
Superintendente de Desenvolvimento e Planejamento Acadêmico	♦	Pedro Daltro Gusmão da Silva

FTC-EAD

Faculdade de Tecnologia e Ciências – Ensino a Distância

Diretor Geral	♦	Reinaldo de Oliveira Borba
Diretor Acadêmico	♦	Roberto Frederico Merhy
Diretor de Tecnologia	♦	Jean Carlo Nerone
Diretor Administrativo e Financeiro	♦	André Portnoi
Gerente Acadêmico	♦	Ronaldo Costa
Gerente de Ensino	♦	Jane Freire
Gerente de Suporte Tecnológico	♦	Luís Carlos Nogueira Abbehusen
Coord. de Softwares e Sistemas	♦	Romulo Augusto Merhy
Coord. de Telecomunicações e Hardware	♦	Osmane Chaves
Coord. de Produção de Material Didático	♦	João Jacomel

EQUIPE DE ELABORAÇÃO / PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

♦ **Produção Acadêmica** ♦

Autor	♦	Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento
Gerente de Ensino	♦	Jane Freire
Supervisão	♦	Ana Paula Amorim
Coordenador de Curso	♦	Geciara da Silva Carvalho
Revisão Final	♦	Elias Santiago de Assis. Márcia Sekeff Budaruiche Lima.

♦ **Produção Técnica** ♦

Edição em LaTeX 2ε	♦	Adriano Pedreira Cattai. Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.
Revisão de Texto	♦	Carlos Magno
Coordenação	♦	João Jacomel
Equipe Técnica	♦	Alexandre Ribeiro, Angélica Jorge, Cefas Gomes, Clauder Filho, Delmara Brito, Diego Doria Aragão, Fábio Gonçalves, Francisco França Júnior, Hermínio Filho, Israel Dantas, Lucas do Vale, Marcio Serafim, Mariucha Ponte, Ruberval Fonseca e Tatiana Coutinho.

www.ead.ftc.br

Sumário

Apresentação de Disciplina

Caro aluno,

Este material foi concebido com o intuito de atender às necessidades do curso de Fundamentos de Geometria da FTC-EaD. Inicialmente, tratamos de que forma é construída a geometria euclideana plana e em seguida fala-se em duas sub-áreas: Posição e Métrica. Na primeira, os conceitos primitivos, os axiomas, as definições e alguns resultados são tratados de forma a construir os elementos e como este se situam no plano. Na segunda, definem-se as medidas de comprimento e de área e fórmulas são obtidas para calculá-las.

Neste material, os resultados apresentados e demonstrados são de fundamental importância para que se possa argumentar de forma concisa outros resultados não demonstrados. Estude os resultados demonstrados e prove os que foram deixados como exercício!

Em cada capítulo, exercícios resolvidos são colocados de forma a apresentar uma metodologia de raciocínio. Aproveite-as para resolver os exercícios propostos. No final, encontra-se uma atividade orientada como parte de sua de avaliação individual.

A Geometria Plana, apesar de elementar, possui um estrutura muito rica e quem a domina tem a sensação de um conhecimento amplo da Matemática.

Para que possamos aprimorar este material contamos com sua ajuda. Bons estudos e sucesso em sua carreira.

Prof. *Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.*

Bloco temático 1 — Posição

Tema 1 — Geometria Axiomática, Segmentos, Ângulos e Triângulos

Axiomática

Neste capítulo é necessário a introdução de alguns conceitos fundamentais, sem os quais o aprendizado da Geometria Plana não seria devidamente apresentada e assimilada pelo estudante.

1.1 O Método Axiomático

A estrutura teórica de cada área da Matemática é disposta em:

⋆ O Conceito Primitivo;

⋆ Os Axiomas ou Postulados;

⋆ As Definições; Os Teoremas, Lemas e Corolários.

$\boxed{\text{Conceitos Primitivos}}$
$\Downarrow$
$\boxed{\text{Axiomas}}$
$\Downarrow$
$\boxed{\text{Teoremas / Lemas}}$
$\Downarrow$
$\boxed{\text{Corolários}}$

Estes conceitos, de relativa importância em nosso estudo, com o auxílio de uma boa nomenclatura, determinam o modo de organizar o pensamento na matemática contemporânea e serão descritos a seguir.

A matemática necessita de rigor e de formalismo. Portanto, é preciso estabelecer um método bem determinado para se obter resultados válidos. Isto é feito com auxílio dos axiomas e dos conceitos primitivos. Um conceito é primitivo quando é tido como verdade e isento de definição. Os exemplos clássicos são: o “ponto”, a “reta” e o “plano”. Simplesmente não os definimos, apenas os aceitamos.

Axiomas são afirmativas (conjunto de regras) aceitas sem comprovação e que determinam as propriedades de alguns conceitos primitivos. Uma teoria é dita *axiomatizada* quando é construída a partir de axiomas. Em outras palavras: a teoria tem como ponto de partida alguns princípios básicos que constituem seu conjunto de axiomas ou postulados. Esses postulados (ou axiomas) são escolhidos, até certo ponto, arbitrariamente; todavia, uma escolha não adequada de axiomas poderá originar uma teoria inconsistente ou desprovida de qualquer sentido. Uma teoria axiomática é tanto mais elegante quanto menor for seu número de axiomas e estes devem ser escolhidos com a preocupação de que sejam

⋆ *consistentes*: não conduz a teoremas contraditórios, isto é, a um teorema e à sua negação. Exemplificando: uma geometria que demonstra o teorema de Pitágoras e, por outro lado, conduza à sua negação, não é consistente.

⋆ *suficientes ou completos*: a teoria pode ser desenvolvida sem a necessidade de outros axiomas.

⋆ *independentes*: quando nenhum deles pode ser demonstrado a partir dos demais.

Quando se verifica que um dos axiomas pode ser demonstrado a partir dos outros, tal axioma passa a ser um dos teoremas da teoria e, com isto, o conjunto de axiomas torna-se menor, o que é sempre desejável.

Durante muito tempo distinguiu-se *axioma* de *postulado*. Os axiomas eram proposições evidentes por si mesmas; e postulados, proposições que se pediam fossem aceitas sem demonstração. Atualmente, axiomas e postulados são designações das proposições admitidas sem demonstração. Constituem o ponto de partida de uma teoria dedutiva.

A Geometria de Euclides foi a primeira teoria matemática a ser axiomatizada. Ele apresentou, em sua famosa obra *Os Elementos*, um conjunto com cinco axiomas e cinco postulados.

Axiomas: Noções comuns mais gerais que os postulados.

A1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

A2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais.

A3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.

A4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.

A5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados: Noções essencialmente geométricas

P1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade.

P2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.

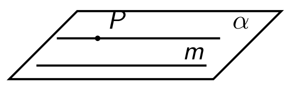
P3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.

P4. Todos os ângulos retos são iguais.

P5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas, se prolongadas suficientemente, encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado, veja a figura.

Este 5° é o famoso postulado das paralelas. Atualmente é apresentado com as seguintes palavras:

Nota 1. *Por um ponto P exterior a uma reta m, consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta m.*



Com esses axiomas e postulados, Euclides construiu toda Geometria ensinada em escolas de ensino médio. O famoso Teorema de Pitágoras é característico dessa Geometria. Tanto assim o é, que ele surge, na maioria das vezes, ao abrirmos um livro de Matemática, seja este de que nível for. O Teorema de Pitágoras é próprio dos espaços euclidianos, assim chamados em homenagem ao geômetra alexandrino.

Por cerca de dois mil anos, a Geometria de Euclides foi considerada como a única geometria possível. De fato, a Geometria Euclidiana não contraria os nossos sentidos, pois os seus axiomas, por exemplo, são noções facilmente aceitas pela nossa intuição.

1.2 O Quinto Postulado e as Geometrias Não-Euclidianas

A certa altura da História da Ciência, os matemáticos, estimulados pelas afirmações de alguns filósofos representados de forma enfática por Emmanuel Kant, argumentaram com a seguinte idéia: "se há possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, conseqüência lógica de proposições primeiras”. Foi dentro desse raciocínio que renomados matemáticos tentaram provar o 5° Postulado de Euclides, pois o consideravam menos intuitivo e de redação mais complicada. Porém, essa pretensão não foi alcançada, porquanto o 5° Postulado não é uma conseqüência lógica dos quatro anteriores. Substituindo-o, criam-se novas geometrias, tão boas e consistentes quanto a Euclidiana. A Geometria Euclidiana, transmitida de geração a geração por mais de dois mil anos, não era a única. As mentes criativas dos matemáticos Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann lançaram as bases de outras geometrias tão logicamente aceitas quanto a Euclidiana. Essas geometrias são conhecidas como *geometrias não-euclidianas*.

Citemos, respectivamente, os axiomas que criaram as geometrias de Riemann (1826-1866) e Lobatchevski (1793-1856) pela modificação apenas do postulado das paralelas de Euclides:

- ⋆ Por um ponto fora de uma reta não existe qualquer reta paralela à reta dada.
- ⋆ Por um ponto fora de uma reta existem infinitas retas paralelas à reta dada.

O “plano de Riemann” é uma superfície esférica. As retas são circunferências máximas (circunferências cujo centro coincide com o centro da esfera). Observe que neste plano não existem retas paralelas, pois duas retas sempre se encontram.

Essas “novas” geometrias foram concebidas sem a pretensão de descrição do mundo real. Porém, Einstein (1879-1955) mostrou que o espaço é curvo, como o conceberam Riemann e Lobatchevski. Com sua teoria da Relatividade revolucionou o mundo da Física, que até então obedecia somente as leis de Newton (1643-1727) no espaço euclidiano. Desta forma, a geometria de Euclides (c. 300 a.C.) e as Leis de Newton eram válidas para algumas circunstâncias específicas.

1.3 Definições, Teoremas e Demonstrações

Uma definição é um conceito que é feito em função de termos considerados previamente conhecidos. Por exemplo, “um segmento de reta é uma parte ou porção da reta limitada por dois pontos”. Observe que são conhecidos os termos ponto, reta e parte, dentre outros.

Partindo-se de uma teoria devidamente axiomatizada, surgem as definições, as proposições ou teoremas, corolários, leis e regras matemáticas, dentre outros; uma enorme cadeia de sub-ramos que forma um sistema semelhante a uma grande árvore sustentada pelas suas raízes (os axiomas ou postulados).

Um teorema é aceito como logicamente verdadeiro somente mediante uma prova ou demonstração. O enunciado de um teorema compreende duas partes distintas:

- ⋆ *hipótese* — conjunto de condições aceitas como verdadeiras;
- ⋆ *tese* — verdade lógica que se pretende demonstrar a partir da hipótese.

O raciocínio que permite concluir o estabelecimento da tese, supondo compreendidas as condições da hipótese é chamado de *demonstração*.

Hipótese
Conjunto de todas as informações iniciais.
$\Downarrow$
Demonstração
Conjunto de raciocínios e deduções tomados a partir da hipótese ou de resultados pertinentes.
$\Downarrow$
Tese
Resultado o qual se quer chegar obtido da demonstração.

Por exemplo, na proposição: “*Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então são congruentes*”, temos:

Hipótese: “*dois ângulos que são opostos pelo vértice*”.
Tese: “*são congruentes*”.

Existem, basicamente, duas formas de demonstrar um teorema. Os métodos:

Direto — que se utiliza das informações contidas na hipótese e outros resultados pertinentes e que através de uma seqüencia lógica coerente chega ao resultado ou tese.

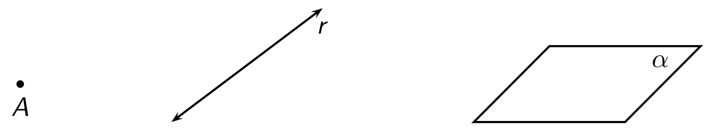
Indireto — também conhecido como método de redução ao absurdo. Sua estratégia é baseada na negação lógica da proposição tese e conseqüente contradição da hipótese.

1.4 Noções Primitivas em Geometria Plana

As noções (conceitos, termos, entes) geométricas são estabelecidas por meio de definição, já as noções primitivas são adotadas de forma intuitiva, sem uma definição.

As noções primitivas da geometria plana são: **Ponto**, **Reta** e **Plano**.

Utilizas-se para indicar: os pontos, letras maiúsculas do nosso alfabeto; as retas, letras minúsculas do nosso alfabeto; os planos, letras gregas minúsculas.

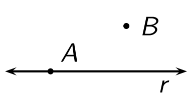


PONTO RETA PLANO

Ao estudar geometria é comum fazermos uso de desenhos. Utilizaremos várias figuras e desenhos como ajuda ao entendimento e à intuição, mas avisamos que uma figura com determinadas características não demonstra a verdade ou falsidade de uma proposição matemática.

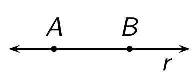
Iniciaremos a Geometria Plana com alguns postulados relacionando o *ponto*, a *reta* e o *plano*.

1.5 Axiomas de Existência



Axioma 1. *Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.*

Axioma 2. *Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.*

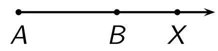


Axioma 3. *Num plano há infinitos pontos.*

Dados dois pontos A e B, de duas uma: ou A e B são *coincidentes* (um só ponto com dois nomes) ou A e B são distintos. Pontos *colineares* são pontos que pertencem a uma mesma reta.

Sejam r e s duas retas contidas num mesmo plano, são ditas *paralelas* quando não possuírem nenhum ponto em comum; e *concorrentes* quando possuírem somente um ponto em comum.

Dados dois pontos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semi-reta $\overrightarrow{AB}$. Dizemos semi-reta $\overrightarrow{AB}$ com origem em A e que passa por B.



1.6 Axiomas de Determinação

Axioma 4. *Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.*

A expressão "*duas retas coincidentes*" é equivalente a *uma única reta*.

Axioma 5. *Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.*

Axioma 6 (da inclusão)**.** *Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.*

> ***Nota 2.*** Pontos *coplanares* são pontos que pertencem a um mesmo plano. *Figura* é qualquer conjunto de pontos. Uma *figura plana* é uma figura que tem todos os seus pontos num mesmo plano. A *Geometria Plana* estuda as figuras planas.

***ER* 1.1.** Julgue: Por três pontos dados passa uma só reta.

Solução: Falso. Se os três pontos não forem colineares então não existirá nenhuma reta que passe pelos três pontos ao mesmo tempo.

1.7 Exercícios

***EP* 1.2.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

1. ( ) Por um ponto passam infinitas retas.
2. ( ) Por dois pontos distintos passa uma reta.
3. ( ) Uma reta contém dois pontos distintos.
4. ( ) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.
5. ( ) Três pontos distintos são sempre colineares.
6. ( ) Três pontos distintos são sempre coplanares.
7. ( ) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.
8. ( ) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.
9. ( ) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.
10. ( ) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se $A \neq B$, então existe uma reta r tal que $A \in r$ e $B \in r$.
11. ( ) Quaisquer que sejam os pontos P e Q e as retas r e s, se $P \neq Q$, e $P, Q \in r$ e $P, Q \in s$, então $r = s$.

12. ( ) Qualquer que seja uma reta r, existem dois pontos A e B tais que $A \neq B$, com $A \in r$ e $B \in r$.

13. ( ) Se $A = B$, existe uma reta r tal que A, $B \in r$.

14. ( ) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.

15. ( ) Duas retas concorrentes tem um ponto comum.

16. ( ) Se duas retas distintas tem um ponto comum, então elas possuem um único ponto

***EP* 1.3.** Usando quatro pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

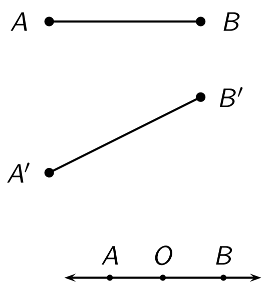
Gabarito

EP 1.2. 1. (V) 2. (V) 3. (V) 4. (V) 5. (F) 6. (V) 7. (F) 8. (V) 9. (F) 10. (V) 11. (V) 12. (V) 13. (V) 14. (V) 15. (V) 16. (V); **EP** 1.3. 4.

As Partes de uma Reta

1.8 Semi-reta e Segmento de Reta

1.1 Definição. Considere dois pontos A e B sobre uma reta r. A parte ou porção da reta com extremidade em A e contendo o ponto B é uma semi-reta com extremidade em A contendo B. A parte ou porção da reta r delimitada pelos pontos A e B é um segmento de reta.



Assim, dados dois pontos A e B, $A \neq B$, e um ponto O entre A e B, as semi-retas com origem em O e contendo, respectivamente, os pontos A e B são chamadas de semi-retas opostas e o segmento de reta com extremidades em A e B é indicado por AB. Qualquer ponto do segmento AB, que está entre os extremos, é chamado ponto interior ou interno deste segmento.

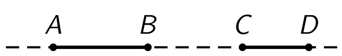
1.9 Classificação de um Segmento de Reta

Dois segmentos de reta são ditos:

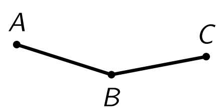
◇ Colineares: se estão na mesma reta suporte (a reta que contém os segmentos);

◇ Consecutivos: se possuem uma, e só uma, extremidade em comum;

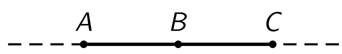
◇ Adjacentes: se são colineares e consecutivos, mas não possuem pontos internos em comum.



Colineares



Consecutivos



Adjacentes

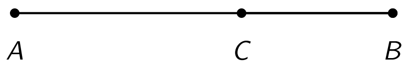
1.10 Coordenada de um Ponto

Axioma 7. *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes.*

Atenção! O número a que se refere este axioma é chamado distância entre os pontos, que significa o comprimento ou a medida do segmento determinado pelos dois pontos.

Axioma 8. *Os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre os números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado coordenada deste ponto. Considere um segmento AB. Se a e b são as coordenadas das extremidades deste segmento, o seu comprimento será o módulo da diferença entre a e b em qualquer ordem. Indicaremos o comprimento do segmento AB pelo símbolo $\overline{AB}$. Portanto, $\overline{AB} = |b - a|$.



Axioma 9. *Se um ponto C encontra-se entre A e B, então*

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

Com os últimos três axiomas podemos ordenar os pontos da reta com a ordem dos números reais. Os números reais são ordenados pela relação "menor do que" (ou pela relação "maior do que"), e faz sentido dizer que um número c está entre dois outros a e b, quando ocorre $a < c < b$ ou $b < c < a$.

Vamos enunciar e demonstrar um resultado que ajudará na demonstração do teorema 1.3.

1.2 Proposição. Se, em uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$, considerarmos um segmento AC, com $\overline{AC} < \overline{AB}$, então o ponto C estará entre A e B.

Prova: Hipótese: $\overline{AC} < \overline{AB}$. Tese: C está entre A e B.
O ponto A não pode estar entre B e C, já que B e C estão na mesma semi-reta de origem A. Se o ponto B estivesse entre A e C, então, pelo axioma 9, teríamos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e, como conseqüência, $\overline{AB} < \overline{AC}$. Mas, esta desigualdade contraria a hipótese $\overline{AC} < \overline{AB}$. Restando apenas a alternativa que o ponto C está entre os pontos A e B. □

1.3 Teorema. Sejam A, B e C pontos distintos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. O ponto C está entre A e B se, e somente se, o número c está entre a e b.

Prova: Faremos a demonstração em duas partes.
Parte 1: Hipótese: C está entre A e B. Tese: $a < c < b$. ....
Se C está entre A e B, pelo axioma 9, tem-se que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, ou seja,

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Vamos supor que $a < c$. Neste caso, da igualdade acima, obtém-se $|c - a| < b - a$ e $|b - c| < b - a$. Como conseqüência, $c - a < b - a$ e $b - c < b - a$. Portanto, $c - b$ e $a < c$. Assim, resulta que c está entre a e b. Quando $b < a$, a demonstração é análoga.
Parte 2: Hipótese: $a < c < b$. Tese: C está entre A e B. ....
Considerando que o número c está entre os números a e b então $|c - a| + |b - c| = |a - b|$. Como conseqüência dessa igualdade, temos que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Em particular, $\overline{AC} < \overline{AB}$ e $\overline{CB} < \overline{AB}$ e $\overline{CB} < \overline{AB}$. Consideremos as semi-retas determinadas pelo ponto A. Se C e B pertencem à mesma semi-reta, a proposição 1.2 diz que C está entre A e B. Resta o seguinte, C e B não podem estar separados por A, porque, se assim fosse, teríamos $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$, resultando que $\overline{BA} < \overline{BC}$, o que contradiz a desigualdade obtida anteriormente. □

1.4 Definição (Ponto Médio)***.*** *Chamamos de ponto médio do segmento AB a um ponto M deste segmento tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$.*

1.5 Teorema. Todo segmento tem um único ponto médio.

Prova: A demonstração é dividida em duas partes, uma onde é demonstrada a existência de tal ponto e na outra parte é demonstrada a unicidade.

Parte 1: Existência ....

Considere as coordenadas a e b das extremidades do segmento AB. O axioma 9 nos garante que existe um número $\dfrac{a+b}{2}$. Seja C o ponto da reta cuja coordenada é c. Então,

$$\left.\begin{array}{rcccccc} \overline{AC} & = & |a-c| & = & \left|a - \dfrac{a+b}{2}\right| & = & \left|\dfrac{a-b}{2}\right| \\ \\ \overline{CB} & = & |c-b| & = & \left|\dfrac{a+b}{2} - b\right| & = & \left|\dfrac{a-b}{2}\right| \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AC} = \overline{CB}.$$

Como $a < c < b$, pelo teorema 1.3, concluímos que C está entre A e B. Logo, C é um ponto médio de AB.

Parte 2: Unicidade ....

Suponha que exista um outro ponto denotado C', cuja coordenada é c', tal que $\overline{AC'} = \overline{C'B}$. Se $a < c' < b$, então teremos que $c' - a = b - c'$ e, conseqüentemente, $c' = \dfrac{a+b}{2}$. O mesmo ocorrerá se supormos que $b < c' < a$. Então, pelo axioma 8, $C = C'$. $\square$ $\square$

Nota 3. Se B pertence ao intervalo AC, então a noção de distância entre dois pontos A e B (que indicamos como o comprimento do segmento AB, dado por $\overline{AB}$) é uma das noções mais básicas da geometria, satisfazendo as propriedades:

1. $\overline{AB} \geq 0$ e $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
2. $\overline{AB} = \overline{BA}$
3. $\overline{AC} \geq \overline{AB} + \overline{BC}$

A propriedade 3 é conhecida como *desigualdade triangular*.

***ER* 1.4.** Determine a medida do segmento AB sabendo que $\overline{AC} = 2x - 4$, $\overline{CB} = x + 6$ e C é ponto médio do segmento AB.

Solução: C é ponto médio de AB. Portanto, $\overline{AC} = \overline{CB} \therefore 2x - 4 = x + 6$. Logo, $x = 10$ e

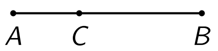
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2x - 4 + x + 6 = 3x + 2 = 32.$$

1.11 Razão de Secção

1.6 Definição (Razão de Secção Interna)**.** Considere o segmento de reta AB e C um ponto interno deste segmento. A razão

$$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

é chamada razão ou divisão de seção interna. Os segmentos AC e CB são chamados aditivos.



Posição de C	Razão k
C é ponto médio	$k = 1$
C está mais próximo de A	$k < 1$
C coincide com A	$k = 0$
C está mais próximo de B	$k > 1$
$C \to B$	$k \to \infty$

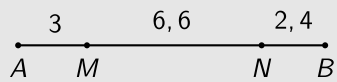
Nota 4. É claro que se C é ponto médio do segmento AB, então $k = 1$. Se C está mais próximo a A, então $k < 1$. Caso contrário, $k > 1$. Quanto mais próximo de A o ponto C estiver, mais próximo de 0 a razão k estará.

***ER* 1.5.** Um segmento AB de medida $12\ cm$ foi dividido internamente por dois pontos M e N, na razão $\frac{1}{3}$ e 4, respectivamente. Determine a medida do segmento MN.

Solução: Como $k_M < 1$ e $k_N > 1$ o ponto M está mais próximo de A do que o ponto N. Fazendo-se $\overline{AM} = x$ e $\overline{AN} = y$, temos $\overline{MB} = 12 - x$ e $\overline{NB} = 12 - y$. Segue que

$$k_M = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{x}{12 - x} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad k_N = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{y}{12 - y} = 4.$$

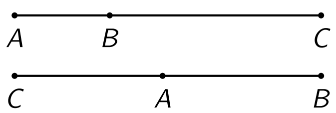
Resolvendo-se este sistema de equações, encontramos $x = 3$ e $y = 9,6$.
Assim, $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = 9,6 - 3 = 6,6$.



1.7 Definição (Razão de Secção Externa)**.** *Dividir um segmento de reta AB externamente por um ponto C, numa razão*

$$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

em que AC e CB são segmentos consecutivos tais que $|\overline{AC} - \overline{CB}| = \overline{AB}$. Os segmentos AC e CB são então chamados de subtrativos.



Posição de C	Razão k
C está mais próximo de A	$k < 1$
C está mais próximo de B	$k > 1$
C coincide com A	$k = 0$
$C \to B$	$k \to \infty$
$C \to \infty$	$k \to 1$

Nota 5. É claro que se B é ponto médio do segmento AC, então $k = 2$. Se C está mais próximo a A, então $k < 1$. Caso C esteja mais próximo a B, $k > 1$.

***ER* 1.6.** Um segmento AB de medida $12\ cm$ foi dividido externamente por dois pontos M e N, na razão $\frac{1}{3}$ e 4, respectivamente. Determine a medida do segmento MN

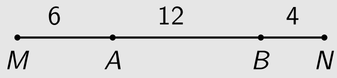
Solução: Como $k_M < 1$ e $k_N > 1$, o ponto M está mais próximo de A e o ponto N, de B. Fazendo-se

$\overline{AM} = x$ e $\overline{AN} = y$, temos $\overline{MB} = 12 + x$ e $\overline{NB} = 12 + y$. Segue que

$$k_M = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{x}{12+x} = \frac{1}{3} \quad k_N = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{y}{-12+y} = 4.$$

Resolvendo-se estas equações, encontramos $x = 6$ e $y = 16$. Assim,

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN} = 6 + 16 = 22.$$



1.12 Exercícios

***EP* 1.7.** Classifique em (V) verdadeira ou (F) falsa cada uma das afirmações:

1. (   ) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.
2. (   ) Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.
3. (   ) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares.
4. (   ) Se dois segmentos são colineares, então eles são adjacentes.
5. (   ) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.
6. (   ) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes.

***EP* 1.8.** Sejam A, B e C pontos de uma reta. Faça um desenho representando-os, sabendo que $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ e que $\overline{BC} = 5$.

***EP* 1.9.** Repita o exercício anterior, sabendo que C está entre A e B, $\overline{AB} = 7$ e que $\overline{AC} = 5$.

***EP* 1.10.** Quatro pontos A, D, V e I estão sobre uma reta de modo que suas coordenadas são números inteiros consecutivos. Sabe-se, além disto, que V está entre I e A e que $\overline{DA} < \overline{DV}$. Faça uma figura indicando as posições relativas destes pontos.

***EP* 1.11.** Desenhe uma reta e sobre ela marque dois pontos A e B. Suponha que a coordenada do ponto A seja zero e a do ponto B seja um. Marque agora pontos cujas coordenadas são 3, 5, $5/2$, $1/3$, $3/2$, 2, -1, -2, -5, $-1/3$, $-5/3$.

***EP* 1.12.** Sejam A_1 e A_2 pontos de coordenadas 1 e 2. Determine a coordenada do ponto médio A_3 do segmento A_1A_2. Dê a coordenada do ponto médio A_4 do segmento A_2A_3. Dê a coordenada A_5 do ponto médio do segmento A_3A_4.

***EP* 1.13.** Dados três pontos colineares A, B e C tais que $\overline{AB}$ seja o triplo de $\overline{BC}$, calcule as medidas de AB e BC sabendo que $\overline{AC} = 32\ cm$.

***EP* 1.14.** São dados três pontos A, B e C, com B entre A e C. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC, respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$.

***EP* 1.15.** São dados três pontos A, B e C, com C entre A e B. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC, respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} - \overline{BC}}{2}$.

***EP* 1.16.** Considere três pontos colineares A, B e C, sendo que B fica entre A e C e $\overline{AB} = \overline{BC}$. Se M é o ponto médio de AB e N é o ponto médio de BC mostre que $\overline{MN} = \overline{AB}$.

***EP* 1.17.** São dados pontos A, B, C e D colineares, com coordenadas x, y, z e w e tais que $x < y < z < w$. Prove que $\overline{AC} = \overline{BD}$ se, e somente se, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

***EP* 1.18.** Considerando a seguinte afirmação: "Se P é ponto de interseção de círculos de raio r e centros em A e B, então $\overline{PA} = \overline{PB}$" e utilizando régua e compasso, descreva um método para construção de um triângulo com dois lados de mesmo comprimento (tal triângulo é chamado de *triângulo isósceles*). Idem para construção de um triângulo com os três lados de mesmo comprimento (tal triângulo é chamado de *triângulo eqüilátero*).

***EP* 1.19.** Mostre que, se $a < b$, então $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

***EP* 1.20.** Um segmento ligando dois pontos de um círculo e passando pelo seu centro é chamado de *diâmetro*. Mostre que todos os diâmetros têm a mesma medida.

***EP* 1.21.** Dois círculos de mesmo raio e centros A e B se interceptam em dois pontos C e D. O que pode ser afirmado sobre os triângulos ABC e ACD?

***EP* 1.22.** Sejam A, B, C e D quatro pontos da reta m tais que B está entre A e C, e C entre B e D. Sabendo que $\overline{AB} = \overline{CD}$ mostre que $\overline{AC} = \overline{BD}$.

***EP* 1.23.** Quatro pontos A, B, C e D são colineares. O ponto B está entre A e C, e o ponto C entre B e D. Demonstre que o ponto C se encontra entre A e D.

***EP* 1.24.** O, A, B e C são os pontos distintos de uma reta, sucedendo-se na ordem $OABC$, e tais que $\overline{AO} = 3\ cm$, $\overline{OB} = 5\ cm$, $4\overline{AB} + \overline{AC} - 2\overline{BC} = 6\ cm$. Calcule a medida do segmento OC.

***EP* 1.25.** O, A, B, C e D são cinco pontos de uma reta, sucedendo-se na ordem $OABCD$, e tais que $\overline{AO} = 1\ cm$, $\overline{OB} = 3\ cm$, $\overline{OC} = 5\ cm$, $\overline{OD} = 7\ cm$. Sendo M e N os pontos médios de AB e CD, respectivamente, e P o ponto médio de MN, calcule $\overline{OP}$.

***EP* 1.26.** A, B, C e D são pontos distintos de uma reta, sucedendo-se na ordem alfabética, e tais que $\overline{AD} = 12\ cm$ e $\overline{BC} = 7\ cm$. Calcular $\overline{AB} + \overline{CD}$ e a distância entre os pontos médios dos segmentos AB e CD.

***EP* 1.27.** Os segmentos AB e BC; BC e CD são adjacentes, de tal maneira que $\overline{AB} = 3 \cdot \overline{BC}$ e $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{CD}$. Se $\overline{AD} = 36\ cm$, determine as medidas dos segmentos AB, BC e CD.

***EP* 1.28.** Numa carpintaria, empilham-se 50 tábuas, umas de $2\ cm$ e outras de $5\ cm$ de espessura. A altura de pilha é de $154\ cm$, determine a diferença entre o número de tábuas de cada espessura.

***EP* 1.29.** Os pontos P e Q pertencem ao interior do segmento AB e estão de um mesmo lado do seu ponto médio. P divide AB na razão $\dfrac{2}{3}$ e Q divide AB na razão $\dfrac{3}{4}$. Se $\overline{PQ} = 2\ cm$, calcule AB.

***EP* 1.30.** M é um ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ e C é um ponto de reta $\overleftrightarrow{AB}$ externo ao segmento $\overline{AB}$. Demonstrar que $\overline{MC} = \dfrac{\overline{CA} + \overline{CB}}{2}$.

***EP* 1.31.** A, B, C e D são pontos distintos de uma reta, sucedendo-se na ordem alfabética. M e N são os pontos médios respectivos dos segmentos AB e CD. Demonstrar que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2}$.

***EP* 1.32.** O segmento AB vale 7 vezes o segmento CD. Achar a medida de AB quando se toma para unidade a terça parte de CD.

***EP* 1.33.** P, Q e R são três pontos distintos de uma reta. Se $\overline{PQ}$ é igual ao triplo de $\overline{QR}$ e $\overline{PR} = 40\ cm$, determine as medidas dos segmentos PQ e QR.

***EP* 1.34.** AB e BC são segmentos adjacentes cujos pontos médicos respectivos são M e N. Demonstrar que $MN = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$.

***EP* 1.35.** AB e BC são segmentos adjacentes; M e N são os pontos médios respectivos dos segmentos AC e AB. Demonstrar que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$.

***EP* 1.36.** M é o ponto médio de um segmento AB e C é um ponto interno ao segmento MB. Demonstrar que $\overline{MC} = \dfrac{\overline{CA} - \overline{CB}}{2}$.

***EP* 1.37.** Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, contidos numa mesma reta, sendo $AB \equiv BC$, com $A \neq C$. Demonstre que MN é congruente a AB.

***EP* 1.38.** Se A, B e C são pontos colineares, determine $\overline{AC}$, sendo $\overline{AB} = 20\ cm$ e $\overline{BC} = 12\ cm$.

***EP* 1.39.** AB e BC são dois segmentos adjacentes. Se $\overline{AB}$ é o quíntuplo de $\overline{BC}$ e $\overline{AC} = 42\ cm$, determine $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

***EP* 1.40.** Numa reta r, tomemos os segmentos AB e BC e um ponto P de modo que $\overline{AB}$ seja o quíntuplo de $\overline{PC}$, $\overline{BC}$ seja o quádruplo de $\overline{PC}$ e $\overline{AP} = 80\ cm$. Sendo M e N os pontos médios de AB e BC, respectivamente, determine $\overline{MN}$.

***EP* 1.41.** Dados três pontos A, B e C sobre uma mesma reta, consideramos M e N os pontos médios dos segmentos AB e BC. Demonstre que $\overline{MN}$ é igual à semi-soma ou à semi-diferença dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

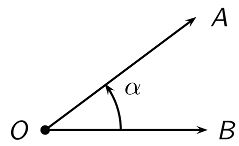
***EP* 1.42.** No segmento AC, toma-se um ponto B de forma que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 2 \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$. Determine o valor de $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$.

Gabarito

EP 1.7. F; F; V; F; V; F. **EP** 1.12. $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}$. **EP** 1.13. $24; 8$ ou $48; 16$. **EP** 1.24. 9 cm. **EP** 1.25. 4 cm. **EP** 1.26. 5 cm; 9,5 cm. **EP** 1.27. 24 cm; 8 cm e 4 cm. **EP** 1.28. 14. **EP** 1.29. 70 cm. **EP** 1.32. 21. **EP** 1.38. 8 cm ou 32 cm. **EP** 1.39. $\overline{AB} = 35\ cm$ e $\overline{BC} = 7\ cm$. **EP** 1.40. 36 cm ou 45 cm ou 20 cm. **EP** 1.42. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Ângulos

1.8 Definição. Um *ângulo* α é uma região do plano delimitada por duas semi-retas com a mesma origem O. As semi-retas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum O de *vértice* do ângulo. Assim, duas semi-retas, cada uma contendo os pontos A e B e com mesma origem, delimitam duas regiões distintas do plano.

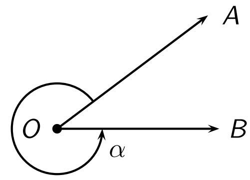


Existem outras definições para ângulo. Na Grécia antiga, um ângulo era definido como sendo uma “deflexão” ou “quebra em uma linha reta”. Euclides definiu um ângulo plano como sendo a inclinação recíproca de duas retas que num plano têm um extremo comum e não estão em prolongamento. Em 1.893, H. Schotten resumiu as definições de ângulo em três tipos:

- ⋆ A diferença de direção entre duas retas;
- ⋆ A medida de rotação necessária para trazer um lado de sua posição original para a posição do outro, permanecendo entrementes no outro lado do ângulo;
- ⋆ A porção do plano contida entre as duas retas que definem o ângulo.

Em 1.634, P. Henrigone definiu ângulo como sendo um conjunto de pontos. Esta definição tem sido usada com mais freqüência. Neste trabalho, aparece pela primeira vez o símbolo “$<$” para representar ângulo.

Existem várias maneiras distintas de representar ângulo. Por exemplo, o ângulo na figura pode ser representado por $A\hat{O}B$ ou por $B\hat{O}A$. Nesta notação a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer entre as outras duas, as quais representam pontos das semi-retas que formam o ângulo.

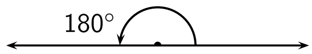


É comum utilizarmos a letra designativa do vértice para representar o ângulo, como, por exemplo, (na figura) $\hat{O}$ ou a utilização de letras gregas para representação de ângulos. Na figura anterior utilizamos α.

1.13 Unidade de Medidas de Ângulos

Axioma 10. *É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e* $180°$ *e as semi-retas da mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.*

Denominamos ângulo raso aquele cujos lados são semi-retas opostas.



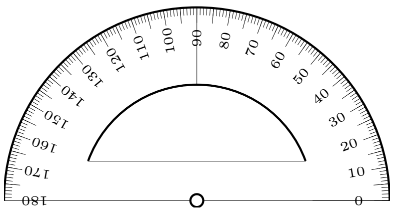


Figura 1.1: Transferidor

Dividamos a abertura de um ângulo raso em 180 partes iguais. Cada ângulo obtido por definição terá a medida de $1°$ (um grau). Como submúltiplos do grau temos:

- ⋆ o minuto ($'$), que corresponde à sexagésima parte do grau, ou seja $1' = \dfrac{1}{60} \cdot 1°$;
- ⋆ o segundo ($''$), que corresponde à sexagésima parte do minuto, ou seja, $1'' = \dfrac{1}{60} \cdot 1'$.

Os ângulos são medidos em *graus* com o auxílio de um transferidor (Figura 1.13).

A astronomia talvez tenha sido o principal fator que desencadeou o estudo feito com ângulos. Pelo menos 1.500 antes de Copérnico, Aristarco propôs um sistema que tinha o Sol como centro. No entanto este material histórico se perdeu. O que ficou foi um tratado escrito por volta de 260 a.C. envolvendo tamanhos e distância do Sol e da Lua.

A divisão do círculo em 360 partes iguais aparece mais tarde e não existe qualquer razão científica. Talvez a razão que a justifique esteja nos estudos feitos pelo povo babilônio (4.000 a.C. - 3.000 a.C.). Este povo realizava muitos estudos para o trato de terrenos pantanosos e construções de cidades. Tinham interesse pela Astronomia e a relação desta com conceitos religiosos (eram politeístas) e, para viabilizar tais procedimentos, criaram um sistema de numeração com base 60 (sistema hexagesimal).

Um outro fato observado é que 60 é o menor número de dois algarismos que possui uma grande quantidade de divisores distintos $D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, razão pela qual este número tenha sido adotado.

O primeiro astrônomo grego a dividir o círculo em 360 partes foi Hipsicles (180 a.C.), seguido pelos caldeus. Por volta de 150 a.C. encontramos uma generalização de Hiparco para este procedimento.

Dividir um círculo em 6 partes iguais era algo muito simples para os especialistas daquela época e é possível que se tenha usado o número 60 para representar a sexta parte do total, que passou a ser 360.

Outro fato que pode ter influenciado na escolha do número 360 é que o movimento de translação da Terra em volta do Sol se realizava em um período de aproximadamente 360 dias, o que era uma estimativa razoável para a época. Hiparco mediu a duração do ano com grande exatidão ao obter $365,2467$ dias. Atualmente esta medida corresponde a $365,2222$ dias.

Nosso entendimento é que o sistema sexagesimal (base 60) tenha influenciado a escolha da divisão do círculo em 360 partes iguais, assim como a divisão de cada uma dessas partes em 60 partes menores e também na divisão de cada uma dessas subpartes em 60 partes menores. Uma garantia para isto é que os babilônios usavam frações com potências de 60 no denominador. As frações sexagesimais babilônicas, usadas em traduções árabes de Ptolomeu, eram traduzidas como:

"primeiras menores partes" = sexagésimos
"segundas menores partes" = sexagésimos de sexagésimos

Quando tais palavras foram traduzidas para o Latim, que foi a língua internacional dos intelectuais por muito tempo, passamos a ter:

"primeiras menores partes" = partes minutae primae
"segundas menores partes" = partes minutae secundae

de onde apareceram as palavras minuto e segundo.

Fique atento! || Usualmente, a unidade de medida de ângulos é o grau.

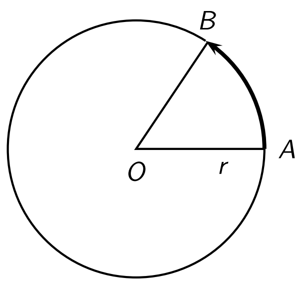
Grado

A unidade grado é muito pouco utilizada, apesar de ser uma unidade decimal, enquanto que o grau é sexagesimal. Vamos dividir a abertura do ângulo raso em 200 partes iguais. Cada ângulo obtido por definição terá a medida de 1 grado $(1\ gr)$. Assim, o ângulo raso pode ter também a medida de $200\ gr$. Os submúltiplos do grado são os usuais para sistemas decimais. Por exemplo, o decigrado $1\ dcgr$ $(0,1gr)$, o centigrado $1\ cgr$ $(0,01gr)$.

Radiano

A unidade de medida de ângulo no Sistema Internacional é o radiano que foi criada pelo matemático Thomas Muir e pelo físico James T. Thomson, de uma forma independente, e adotada como sendo uma unidade alternativa. O termo radian apareceu pela primeira vez num trabalho de Thomson em 1.873.

Uma unidade desta medida é obtida quando tomamos sobre uma circunferência de raio qualquer r um arco cuja medida também é r.



1.13.1 Transformação de Unidades

A transformação de unidades é feita mediante uma simples regra de três, ou seja, estabelecendo-se que

$$180^\circ \text{ —— } 200gr \quad \text{e} \quad 180^\circ \text{ —— } \pi\ rad.$$

***ER* 1.43.** Transforme 45° em grados.

Solução: Sabemos que $180°$ correspondem a $200\ gr$, portanto

$$\begin{array}{lcl} 180° & --- & 200\ gr \\ 45° & --- & x \end{array}$$

Esta proporção nos dá $x = 50\ gr$.

***ER* 1.44.** Quanto mede em graus $\dfrac{3\pi}{2}\ rad$?

Solução: Sabemos que $180°$ correspondem a $\pi\ rad$, portanto

$$\begin{array}{lcl} 180° & --- & 180\ rad \\ x & --- & \dfrac{3\pi}{2} \end{array}$$

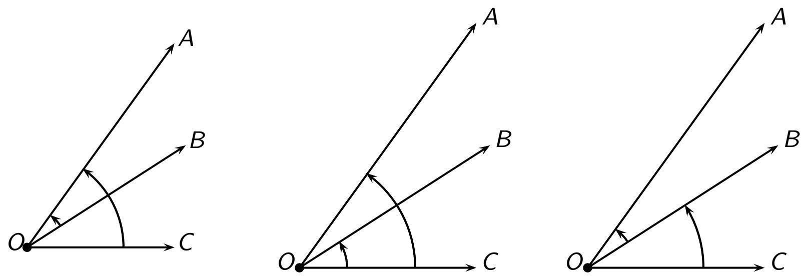
Esta proporção nos dá $x = 270°$.

1.14 Classificação de Ângulos

Sejam $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ semi-retas de mesma origem. Se o segmento AB interceptar $\overrightarrow{OC}$, diremos que $\overrightarrow{OC}$, divide o ângulo $A\hat{O}B$.

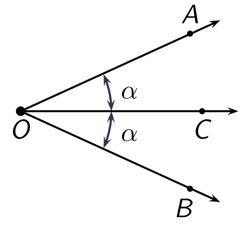
Axioma 11. *Se uma semi-reta $\overrightarrow{OC}$, divide um ângulo $A\hat{O}B$, então $A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$.*

1.9 Definição. *Dois ângulos são ditos consecutivos se o lado de um é também o lado do outro. São ditos ângulos adjacentes se são ângulos consecutivos que não possuem pontos internos em comum.*



Consecutivos:	$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$	$A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$	$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$
Adjacentes:	——	——	$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$
Lado comum:	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OB}$

1.10 Definição (Bissetriz de um ângulo). Chamamos de bissetriz à semi-reta que possui o vértice do ângulo como origem e o divide em dois outros ângulos adjacentes e de mesma medida.



Na figura ao lado, a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

1.14.1 Classificação de Dois Ângulos quanto à sua Soma

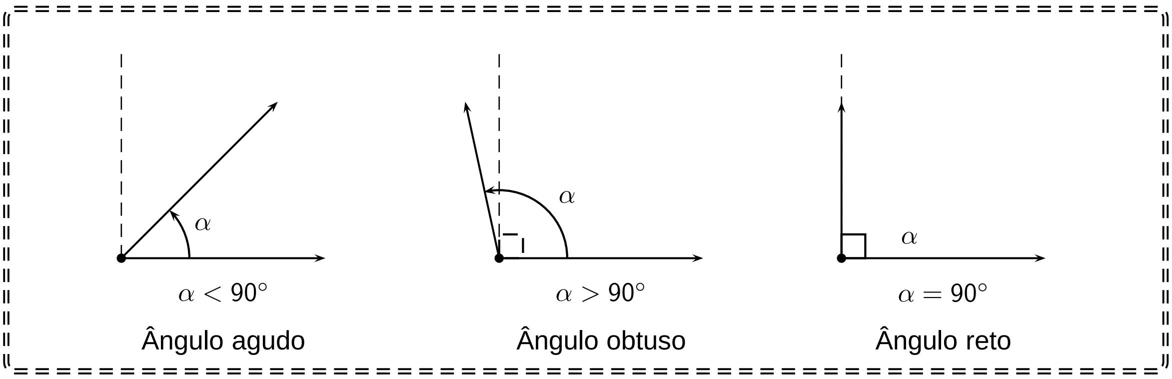
Dois ângulos x e y são chamados:

- $\star$ complementares quando $x + y = 90°$;
- $\star$ suplementares quando $x + y = 180°$;
- $\star$ replementares quando $x + y = 360°$;
- $\star$ explementares quando $x + y = 720°$.

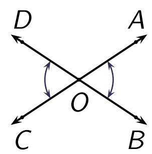
Assim, se a medida de um ângulo é x temos que:

- $\star$ $(90° - x)$ é o complemento de x;
- $\star$ $(180° - x)$ é o suplemento de x;
- $\star$ $(360° - x)$ é o replemento de x;
- $\star$ $(720° - x)$ é o explemento de x.

1.14.2 Classificação de Um Ângulo Quanto à sua Medida



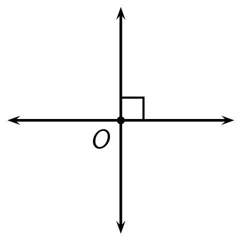
Quando duas retas distintas se interceptam, formam-se quatro ângulos. Como indicado na figura abaixo, dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são opostos pelo vértice. Do mesmo modo o são os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$.



1.11 Proposição. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida.

Prova: Considere $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ dois ângulos opostos pelo vértice, então eles possuem o mesmo suplemento: $A\hat{O}D$. Então, $A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180°$ e $D\hat{O}C + A\hat{O}D = 180°$ e $D\hat{O}C + A\hat{O}D = 180°$. Portanto, $A\hat{O}B = 180° - A\hat{O}D = D\hat{O}C$. $\square$

1.12 Definição. Diremos que duas retas são perpendiculares se elas se intersectam formando ângulo reto.



1.13 Teorema. Por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular a esta reta.

Prova: Fixando um ponto P sobre a reta r. Pelos axiomas 1.1 e 3.1, existem dois semi-planos determinados por esta reta, considere um destes os semi-planos, denotando-o por $\pi_{P,r}$. Pelo axioma 10, existe uma única semi-reta com vértice P contida no semi-plano $\pi_{P,r}$, tal que sua coordenada é de $90°$. Logo, esta semi-reta é perpendicular à reta r. $\square$

***ER* 1.45.** Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às $10\ h$ e $40\ min$.

Solução: Para encontrarmos este ângulo devemos proceder da seguinte maneira:

1. Marque a primeira hora inteira anterior ao horário em questão;

2. Marcar o horário em questão definindo como x o ângulo percorrido pelo ponteiro pequeno;

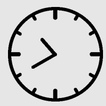
3. Montar a equação referente ao horário, no caso $y = 60° + x$;

4. Observar as regras de três das velocidades dos ponteiros:

$$\text{Ponteiro pequeno (PP) } 30° \text{ —— } 60\ min,$$
$$\text{Ponteiro grande (PG) } 360° \text{ —— } 60\ min$$

Sendo assim,

$$\begin{array}{ccc} PP & & PG \\ 30° & \text{——} & 60\ min \\ x & \text{——} & 40\ min \end{array}$$



Segue que $x = \dfrac{40 \cdot 30}{60} = 20°$. Logo, $y = 60° + x = 80°$.

Um pouco de História

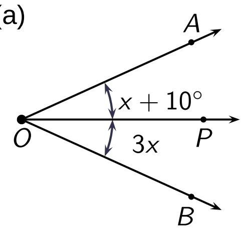
Foi com os gregos que surgiu o conceito de ângulo em trabalhos que envolviam o estudo de relações dos elementos de um círculo junto com o estudo de arcos e cordas. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritas em círculos, eram conhecidas desde o tempo de Hipócrates. Eudoxo talvez tenha usado razões e medidas de ângulos na determinação das dimensões do planeta Terra e no cálculo de distâncias relativas entre o Sol e a Terra. Problemas relacionados com métodos sistemáticos de uso de ângulos e cordas já eram tratados por Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C).

Desde os tempos mais antigos, os povos vêm olhando para o céu na tentativa de encontrar respostas para a vida tanto na Terra, assim como entender os corpos celestes que aparecem à nossa vista. Assim, a Astronomia talvez tenha sido a primeira ciência a incorporar o estudo de ângulos como uma aplicação da Matemática. Na determinação de um calendário ou de uma hora do dia, havia a necessidade de realizar contagens e medidas de distâncias. Freqüentemente, o Sol servia como referência e a determinação da hora dependia da inclinação do Sol e da relativa sombra projetada sobre um certo indicador (relógio de Sol).

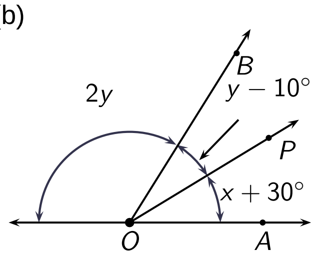
1.15 Exercícios

***EP* 1.46.** Se $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, determine o valor de cada variável desconhecida.

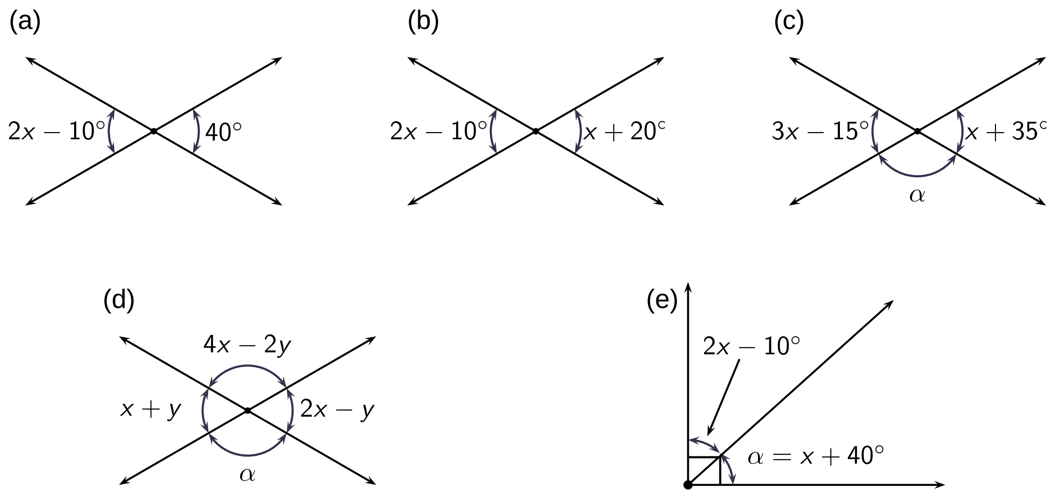
(a)



(b)



***EP* 1.47.** Determine o valor da variável em cada caso.



***EP* 1.48.** Mostre que: “se um ângulo e seu complemento têm a mesma medida, então o ângulo é reto”.

***EP* 1.49.** Dois ângulos são suplementares. A diferença entre eles é de $50°$. Determine a medida dos dois ângulos.

***EP* 1.50.** Mostre que o suplemento de um ângulo agudo é sempre obtuso.

***EP* 1.51.** Quanto mede o ângulo cuja quinta parte do seu suplemento mede $16°$?

***EP* 1.52.** O ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes mede $40°$. Sendo a medida de um deles igual a três quintos da medida do outro, determine a medida dos dois ângulos.

***EP* 1.53.** Três semi-retas de mesma origem são traçadas no plano. Colocando-se um transferidor de forma adequada, a primeira delas tem coordenada 0, a segunda tem coordenada 30 e a última 120. Qual a medida do ângulo entre a segunda e a terceira? Se o transferidor fosse rodado um pouco de modo que a coordenada da primeira fosse agora 20, quais seriam as coordenadas das outras semi-retas?

***EP* 1.54.** Duas retas se interceptam formando quatro ângulos. Se um deles é reto, mostre que os outros também são retos. Se, ao invés de ser reto, um deles medisse $60°$, quais seriam as medidas dos outros?

***EP* 1.55.** Dois ângulos são complementares e o suplemento de um deles mede tanto quanto o suplemento do segundo mais $30°$. Quanto medem os dois ângulos?

***EP* 1.56.** Determine a medida do ângulo agudo que tem a mesma medida do seu complemento.

***EP* 1.57.** Qual é o ângulo agudo que mede o dobro do seu complemento?

***EP* 1.58.** Porque o complemento de um ângulo é sempre menor que o seu suplemento?

***EP* 1.59.** Ao longo de $\frac{1}{2}$ hora o ponteiro dos minutos de um relógio descreve um ângulo raso (ou seja, o ângulo entre sua posição inicial e sua posição final é um ângulo raso). Quanto tempo ele leva para descrever um ângulo de $60°$?

***EP* 1.60.** Ao mesmo tempo em que o ponteiro dos minutos gira, o das horas também gira, só que em menor velocidade: ele leva 6 horas para descrever um ângulo raso. Quanto tempo ele leva para percorrer um ângulo de $10°$?

***EP* 1.61.** Qual o ângulo formado entre o ponteiro dos minutos e das horas quando são 12 horas e 30 minutos?

***EP* 1.62.** Exatamente às 12 horas um ponteiro estará sobre o outro. A que horas voltará a ocorrer que os dois ponteiros formem um ângulo de $0°$?

EP **1.63.** Uma poligonal é uma figura formada por uma seqüência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são os vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados. Desenhe a poligonal $ABCD$ sabendo que:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2\ cm, A\hat{B}C = 120^\circ \text{ e } B\hat{C}D = 100^\circ.$$

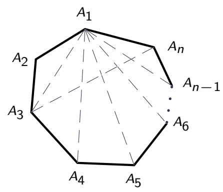
Um polígono é uma poligonal em que as seguintes 4 condições são satisfeitas:

(a) $A_n = A_1$,

(b) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades,

(c) cada vértice é extremidade de dois lados e

(d) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.



Um polígono de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} = A_1$, será representado por $A_1A_2A_3 \cdots A_n$. Ele tem n lados, n vértices e n ângulos.

EP **1.64.** Desenhe um polígono de 4 lados $ABCD$ tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 2\ cm$, com $A\hat{B}C = A\hat{D}C = 100^\circ$ e com $B\hat{C}D = B\hat{A}D = 80^\circ$.

EP **1.65.** A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada de perímetro do polígono. Desenhe um polígono, meça seus lados e determine seu perímetro.

EP **1.66.** Seja $ABCD$ um polígono tal que $AB = BC = CD = DA$. Se $\overline{AB} = a$ seu perímetro será $4a$. Determine um ponto E fora da região limitada pelo polígono tal que ABE é um triângulo eqüilátero. Considere agora o polígono $AEBCD$. Determine seu perímetro.

EP **1.67.** No polígono $ABCD$ da questão anterior, seja M o ponto médio do lado AB. Determine agora dois pontos E_1 e E_2 tais que AE_1M e ME_2B sejam eqüiláteros. Determine agora o perímetro do polígono AE_1ME_2BCD.

EP **1.68.** O segmento ligando vértices não consecutivos de um polígono é chamado uma diagonal do polígono. Faça o desenho de um polígono de seis lados. Em seguida desenhe todas as suas diagonais. Quantas diagonais terá um polígono de 20 lados? E n lados?

EP **1.69.** Dê exemplo de um polígono que possua uma diagonal que não esteja contida na região por ela limitada.

Polígonos convexos recebem designações especiais. Aqui estão algumas designações dadas a estes polígonos de acordo com seu número de lados.

n	Nomenclatura	n	Nomenclatura
3	triângulo	12	dodecágono
4	quadrilátero	13	tridecágono
5	pentágono	14	tetradecágono
6	hexágono	15	pentadecágono
7	heptágono	16	hexadecágono
8	octógono	17	heptadecágono
9	eneágono	18	octadecágono
10	decágono	19	eneadecágono
11	undecágono	20	icoságono

EP **1.70.** Dado um polígono convexo mostre que qualquer de suas diagonais sempre o divide em dois conjuntos convexos.

EP **1.71.** Duas retas concorrentes formam 4 ângulos tais que a soma dos dois menores é a metade de um dos ângulos obtuso formados. Calcular o maior desses ângulos.

EP **1.72.** Qual é o ângulo que, somado à metade do seu replemento, excede o seu suplemento de $\frac{3}{4}$ do seu complemento?

***EP* 1.73.** Por um ponto P de uma reta r traçam-se, do mesmo lado de r, duas semi-retas. Calcular os três ângulos formados sabendo-se que suas medidas, expressas em graus, são números consecutivos.

***EP* 1.74.** Calcular o ângulo que excede seu complemento de $40''$.

***EP* 1.75.** Determinar o complemento, o suplemento e o replemento do ângulo de $67°42'17''$.

***EP* 1.76.** O dobro do suplemento de um ângulo vale sete vezes o seu complemento. Achar o ângulo.

***EP* 1.77.** A soma de dois ângulos é $78°$ e um deles vale os $3/5$ do complemento do outro. Achar os ângulos.

***EP* 1.78.** O quíntuplo do suplemento do complemento de um ângulo é igual ao triplo do replemento do seu suplemento. Achar o ângulo.

***EP* 1.79.** As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de $38°$. Um dos ângulos mede $41°$. Calcular o outro.

***EP* 1.80.** Quatro semi-retas formam em torno de um ponto ângulos cujas medidas sexagésimas são proporcionais aos números 2; 3; 5 e 8. Determine os ângulos.

***EP* 1.81.** $X\hat{O}A$, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}Y$ são três ângulos consecutivos situados num mesmo semi-plano dos determinados pela reta XY, e OM, ON e OP são as suas respectivas bissetrizes. Calcular esses três ângulos, sabendo que $X\hat{O}N$ é reto e que $M\hat{O}P = 100°$.

***EP* 1.82.** $X\hat{O}Y$ é um ângulo reto; OX é a bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ e OY é a bissetriz de um ângulo $C\hat{O}D$. Demonstrar que $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são suplementares.

***EP* 1.83.** OX e OY são bissetrizes de dois ângulos adjacentes, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, ambos agudos, e tais que $A\hat{O}B - B\hat{O}C, = 36°$; OZ é bissetriz do ângulo $X\hat{O}Y$. Calcule o ângulo $B\hat{O}Z$.

***EP* 1.84.** Do ponto A de uma reta XY traça-se a semi-reta AB, que forma com XY um ângulo de $75°$ do mesmo ponto A e no outro semi-plano dos determinados por XY traça-se a semi-reta AC, que forma com XY dois ângulos cujas medidas diferem de $50°$. Achar os três ângulos incógnitos formados em torno do ponto A.

***EP* 1.85.** Seja $A\hat{O}B$ um ângulo e r uma reta do seu plano que contém O, e situada na região não convexa. Sejam OX e OU as bissetrizes dos ângulos agudos que AO e OB formam com r. Se $A\hat{O}B = 150°$, calcule $X\hat{O}Y$.

***EP* 1.86.** Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4h 42min.

***EP* 1.87.** A que horas pela primeira vez após o meio-dia os ponteiros de um relógio formam $110°$?

***EP* 1.88.** É uma hora da tarde. O ponteiro dos minutos coincidirá com o ponteiro das horas pela primeira vez em qual horário?

***EP* 1.89.** Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Quais são estes momentos?

***EP* 1.90.** Pelo ponto C de uma reta AB traçam-se, num mesmo semi-plano dos determinados por AB, as semi-retas CQ, $CTeCR$. O ângulo $A\hat{C}Q$ é o dobro do ângulo $Q\hat{C}T$ e o ângulo $B\hat{C}R$ é o dobro do ângulo $R\hat{C}T$. Calcular o ângulo $Q\hat{C}R$.

***EP* 1.91.** As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são $(8x + 2)°$ e $(3x + 12)°$. Calcule x.

***EP* 1.92.** Calcule o complemento de um ângulo agudo de medida θ que satisfaz a relação: $2\theta + 2\alpha - 4\beta = 0$.

***EP* 1.93.** Calcule o suplemento do complemento de um ângulo de medida θ que satisfaz a relação:

$$3\theta - 6\alpha + 9\beta - 60^\circ = 0.$$

***EP* 1.94.** Prove que a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes complementares é constante.

***EP* 1.95.** Dois ângulos adjacentes, de medidas x e y, estão na razão de 3 para 7. Sabendo que a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes é 30°, calcule x e y.

***EP* 1.96.** $X\hat{O}T$ é um ângulo raso; as semi-retas OY e OZ decompõem esse ângulo em três outros tais que $X\hat{O}Y = 2 \cdot Y\hat{O}Z = \frac{Z\hat{O}T}{3}$. Calcular os dois ângulos consecutivos formados pelas bissetrizes dos ângulos $X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$ e $Z\hat{O}T$.

***EP* 1.97.** Provar que uma reta perpendicular a uma bissetriz de um ângulo, traçada pelo vértice, forma ângulos iguais com os lados do ângulo.

***EP* 1.98.** Da medida de um ângulo tira-se sua terça parte e depois a metade do suplemento do que restou. Obtemos através destas operações o valor de 60°. Qual a medida do ângulo?

***EP* 1.99.** Demonstre que o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às (h) horas e (m) minutos é: $\alpha = (30h - \dfrac{11m}{2})$ (em graus).

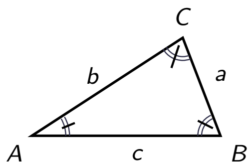
Gabarito

EP 1.46. (a) $x = 5^\circ$, (b) $x = 10^\circ$ e $y = 50^\circ$. **EP** 1.47. (a) 25°; (b) 30°; (c) $x = 25^\circ$ e $\alpha = 120^\circ$; (d) $x = 40^\circ$, $y = 20^\circ$ e $\alpha = 120^\circ$; (e) $x = 20^\circ$ e $\alpha = 60^\circ$. **EP** 1.49. 115°, 65°. **EP** 1.51. 100°. **EP** 1.52. 30°, 50°. **EP** 1.53. 90°; 50° e 140°. **EP** 1.54. 60°, 120° e 120°. **EP** 1.55. 30°, 60°. **EP** 1.56. 45°. **EP** 1.57. 60°. **EP** 1.59. 10 min. **EP** 1.60. 20 min **EP** 1.61. 165°. **EP** 1.62. 13 h 5 min 27 s. **EP** 1.66. $5a$. **EP** 1.67. $5a$. **EP** 1.68. 170, $\dfrac{n(n-3)}{2}$. **EP** 1.70. **EP** 1.71. 144° **EP** 1.72. 30° **EP** 1.73. 59°, 60° e 61° **EP** 1.74. $45^\circ 20''$ **EP** 1.75. $22^\circ 17' 43''$; $112^\circ 17' 43''$ e $292^\circ 17' 43''$. **EP** 1.76. 54°. **EP** 1.77. 18° e 60° **EP** 1.78. 45° **EP** 1.79. 35° **EP** 1.80. 40°; 60°; 100° e 160° **EP** 1.81. $X\hat{O}A = B\hat{O}Y = 80^\circ$ e $A\hat{O}B = 20^\circ$. **EP** 1.83. 9° **EP** 1.84. $105^\circ; 115^\circ$ e 65°. **EP** 1.85. 165°. **EP** 1.86. 111°. **EP** 1.87. $12h20min$. **EP** 1.88. $13h05min27s$. **EP** 1.89. $4h5\frac{5}{11}min$ e $4h38\frac{2}{11}min$. **EP** 1.90. $Q\hat{C}R = 60^\circ$. **EP** 1.91. $X = 2$. **EP** 1.92. $90^\circ - 2\beta + \alpha$. **EP** 1.93. $110^\circ + 2\alpha - 2\beta$. **EP** 1.95. $x = 18^\circ$ e $y = 42^\circ$. **EP** 1.96. $45^\circ; 60^\circ$. **EP** 1.98. 90°.

Triângulos

1.14 Definição. *Dados três pontos A, B e C, não colineares, à reunião dos segmentos AB, BC e AC chamamos triângulo ABC e indicamos por $\triangle ABC$.*

- ◇ Os pontos A, B e C são chamados de vértices;
- ◇ Os segmentos AB, BC e AC de medida c, a e b, respectivamente, são os lados;
- ◇ Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos do triângulo.
- ◇ Diz-se que AB, BC e AC e os ângulos $\hat{C}$, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são, respectivamente, opostos.



1.16 Classificação dos Triângulos

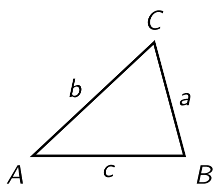
Classifica-se os triângulos de duas maneiras:

1.16.1 Quanto aos Lados

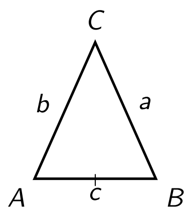
⋆ **Escaleno** – Todos os lados possuem medidas diferentes;

⋆ **Isósceles** – Dois lados possuem medidas iguais. Estes lados são chamados de laterais e o terceiro lado é chamado de base;

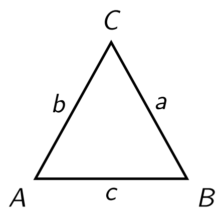
⋆ **Equilátero** – Todos os lados possuem mesma medida.



$a \neq b \neq c$



$a = b$



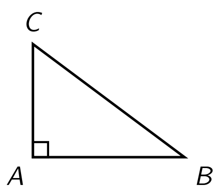
$a = b = c$

1.16.2 Quanto aos Ângulos

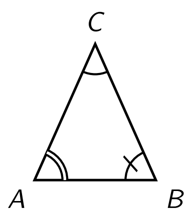
⋆ **Retângulo** – Possui um ângulo retângulo;

⋆ **Acutângulo** – Possui todos os ângulos agudos;

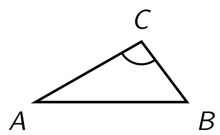
⋆ **Obtusângulo** – Possui um ângulo obtuso.



$\hat{A} = 90°$



$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 90°$



$\hat{C} > 90°$

Congruências

1.17 Congruência de Segmentos, de Ângulos e de Triângulos

Neste capítulo nos limitaremos ao estudo da congruência de segmentos de retas, ângulos e triângulos.

1.17.1 Congruência de Segmentos e de Ângulos

1.15 Definição. *Dizemos que dois segmentos AB e CD (ou dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$) são congruentes se possuem a mesma medida. Utilizaremos o símbolo $\equiv$ para designar a congruência.*

⋄ *$AB \equiv CD$: segmento AB é congruente ao segmento CD;*

⋄ *$\hat{A} \equiv \hat{B}$: ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{B}$.*

A congruência de segmentos é uma relação de equivalência, ou seja:

- ◇ um segmento é sempre congruente a ele mesmo;
- ◇ se um segmento é congruente a outro então este é congruente ao primeiro;
- ◇ dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si.

***Nota* 6.** O mesmo é válido para a relação de congruência de ângulos.

1.17.2 Congruência de Triângulos

1.16 Definição (Congruência de Triângulos)**.** *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Se $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são dois triângulos congruentes e se

$$A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow F \text{ e } C \leftrightarrow G$$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

$$AB \equiv EF, BC \equiv FG, AC \equiv EG,$$

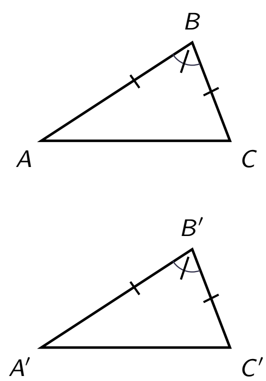
$$\hat{A} \equiv \hat{E}, \hat{B} \equiv \hat{F}, \hat{C} \equiv \hat{G}.$$

Escreveremos $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$ para indicar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes e que a congruência leva A em E, B em F e C em G.

***Nota* 7.** Apesar desta definição exigir que três lados e três ângulos sejam congruentes para que dois triângulos também o sejam, podemos trabalhar com alguns critérios os quais garantem a congruência entre dois triângulos.

Casos ou Critérios de Congruência de Triângulos

Axioma 12 (caso LAL)**.** *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ e $\hat{B} \equiv \hat{B}$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

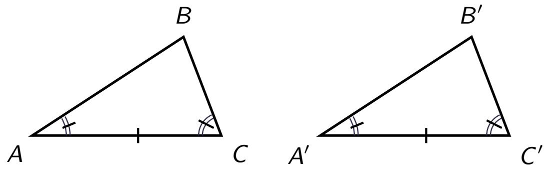


Observe que, de acordo com a definição, para verificarmos se dois triângulos são congruentes temos que verificar seis relações: congruência dos três pares de lados e congruência dos três pares de ângulos correspondentes.

Importante! O axiomac anterior afirma que é suficiente verificar apenas três delas, ou seja, em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$:

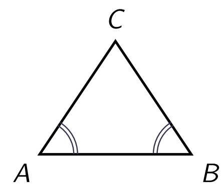
$$\left.\begin{array}{rcl} AB & \equiv & A'B' \\ BC & \equiv & B'C' \\ \hat{B} & \equiv & \hat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rclrclrcl} AB & \equiv & A'B', & BC & \equiv & B'C', & AC & \equiv & A'C' \\ \hat{A} & \equiv & \hat{A}', & \hat{B} & \equiv & \hat{B}', & \hat{C} & \equiv & \hat{C}' \end{array}\right.$$

1.17 Teorema. [caso ALA] Dados $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $AC \equiv A'C', \hat{A} \equiv \hat{A'}$ e $\hat{C} \equiv \hat{C'}$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$



Prova: Considere dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. como na figura acima. Hipóteses: $AC \equiv A'C', \hat{A} \equiv \hat{A}$ e $\hat{C} \equiv \hat{C'} \Leftrightarrow$ tese: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.
Seja P o ponto da semi-reta $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP \equiv A'B'$. Comparando $\triangle ABC$ com $\triangle A'B'C'$ temos, pelo axioma 12 que são triângulos congruentes. Logo, $A\hat{C}P \equiv \hat{C'}$. Mas, por hipótese, $\hat{C'} \equiv A\hat{C}B$. Portanto, $A\hat{C}P \equiv A\hat{C}B$. Conseqüentemente, as semi-retas $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{CB}$ coincidem. Mas então o ponto P coincide com o ponto B e, portanto, o $\triangle ABC$ coincide com $\triangle APC$. Como $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. □

1.18 Proposição. Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.



Pratique! Deixaremos a demonstração desta proposição como exercício para o leitor. Consulte as referências.

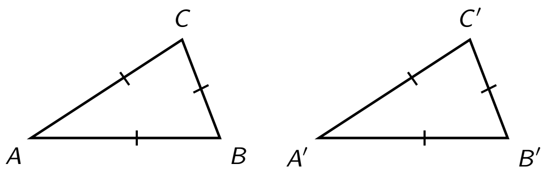
1.19 Proposição. Se em um $\triangle ABC$ tem-se dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.

Prova: Hipótese: $\triangle ABC$ em que $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Tese: $AB \equiv BC$.
Queremos mostrar que $AB \equiv AC$. Comparemos $\triangle ABC$ com ele próprio, fazendo corresponder os vértices (como na prova da proposição anterior), isto é: $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Como $\hat{B} \equiv \hat{C}$ e $\hat{C} \equiv \hat{B}$ por hipótese, e $BC = CB$, segue (pelo teorema ...) que esta correspondência define uma congruência. Como conseqüência $AB = BC$. Logo, por definição, o $\triangle ABC$ é isósceles. Seja $\triangle ABC$ e seja D um ponto da reta que contém B e C. O segmento AD chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC. O segmento AD chama-se bissetriz do ângulo $\hat{A}$ se a semi-reta $\overrightarrow{AD}$ divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes, isto é, se $C\hat{A}D \equiv D\hat{A}B$. O segmento AD chama-se altura do triângulo relativamente ao lado BC, se AD for perpendicular à reta que contém B e C. □

1.20 Proposição. Em um triângulo isósceles a mediana relativamente à base é também bissetriz e altura.

Pratique! Deixaremos a demonstração desta proposição como exercício para o leitor. Consulte as referências.

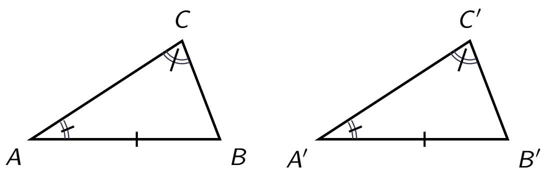
1.21 Teorema. [caso LLL] Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.



Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ (veja na figura acima).

Prova: Hipótese: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$. Tese: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.
Marquemos um ponto P no semi-plano definido pela reta que contém o lado AC que não contém o ponto B. Construímos o triângulo auxiliar $\triangle APC$ de forma que seja congruente a $\triangle A'B'C'$. e tenha o lado AC em comum com o $\triangle ABC$. Pela proposição 4.2, o $\triangle PAB$ é isósceles implicando que $A\hat{B}P \equiv A\hat{P}B = \alpha$. Usando a proposição 4.2, vemos que $\triangle BPC$ também é isósceles, assim, $C\hat{B}P \equiv C\hat{P}B = \beta$. Como $\hat{B} = \hat{P} = \alpha + \beta \rightarrow \hat{B} = \hat{P}$. Daí, pelo caso LAL, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle APC$, e pela construção do triângulo $\triangle APC$ temos que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. □

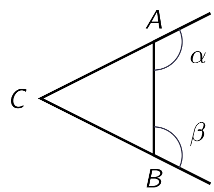
1.22 Teorema. [caso LAA$_O$] Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.



Pratique! Deixaremos este caso para que você, o leitor, tente demonstrar sozinho. Não conseguindo, consulte as referências bibliográficas, ou consulte o professor gestor da disciplina.

1.17.3 Exercícios

***EP* 1.100.** Um ângulo raso é dividido por duas semi-retas em três ângulos adjacentes congruentes. Mostre que a bissetriz do ângulo do meio é perpendicular aos lados do ângulo raso.

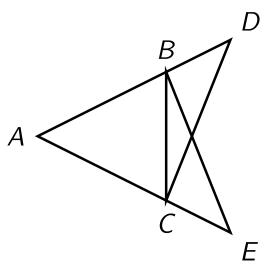


***EP* 1.101.** Na figura ao lado os ângulos α e β são congruentes. Mostre que

$$\overline{AC} = \overline{BC}.$$

.

***EP* 1.102.** Na figura ao lado tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{CE}$. Mostre que: $\triangle ACD \equiv \triangle ABE$ e $\triangle BCD \equiv \triangle CBE$.

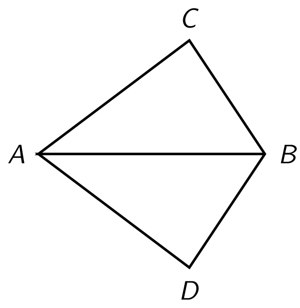


***EP* 1.103.** Dois segmentos AB e CD se interceptam em um ponto M o qual é ponto médio dos dois segmentos. Mostre que $\overline{AC} = \overline{BD}$.

***EP* 1.104.** Em um triângulo ABC a altura do vértice A é perpendicular ao lado BC e o divide em dois segmentos congruentes. Mostre que $\overline{AB} = \overline{AC}$.

***EP* 1.105.** Mostre que os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles formam um triângulo também isósceles.

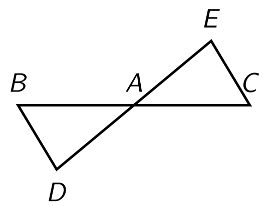
***EP* 1.106.** Na figura abaixo, $\overline{AC} = \overline{AD}$ e AB é bissetriz do ângulo $C\hat{A}D$. Prove que os triângulos ACB e ADB são congruentes.



***EP* 1.107.** Em um quadrilátero $ABCD$ sabe-se que $AB = CD$ e $BC = AD$. Mostre que os triângulos ACB e CAD são congruentes. Conclua que os ângulos opostos do quadrilátero são congruentes, isto é, $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$. Altere sua prova para mostrar que, se os quatro lados tiverem a mesma medida então os quatro ângulos serão congruentes.

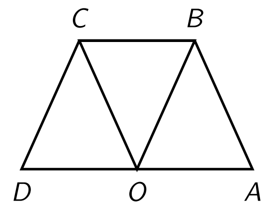
***EP* 1.108.** Mostre que um triângulo eqüilátero é também equiangular, isto é, tem os três ângulos iguais.

***EP* 1.109.** Na figura abaixo o ponto A é ponto médio dos segmentos CB e DE. Prove que os triângulos ABD e ACE são congruentes.



***EP* 1.110.** Dois círculos de centro A e B e mesmo raio se interceptam em dois pontos C e D. Se M é o ponto de interseção de AB e CD, mostre que $\overline{AM} = \overline{MB}$ e $\overline{CM} = \overline{MD}$.

***EP* 1.111.** Use o resultado do exercício anterior para descrever um método de construção, usando apenas régua e compasso, de uma perpendicular a uma reta passando por um ponto fora desta.

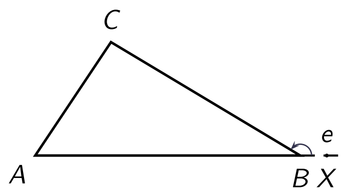


***EP* 1.112.** Da figura abaixo é sabido que $\overline{OC} = \overline{OB}$, $\overline{OD} = \overline{AO}$ e $B\hat{O}C = C\hat{O}A$. Mostre que $\overline{CD} = \overline{BA}$. Se, além disto, soubermos que $\overline{CD} = \overline{OB}$ conclua que os três triângulos formados são isósceles.

***EP* 1.113.** Um quadrilátero tem diagonais congruentes e dois lados opostos também congruentes. Mostre que os outros também são congruentes.

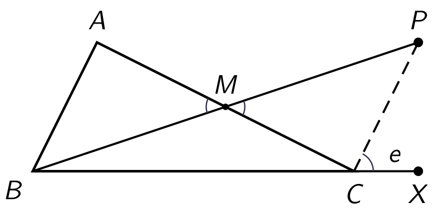
1.18 O Teorema do Ângulo Externo

1.23 Definição. Seja $\triangle ABC$, os seus ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são chamados de *ângulos internos* ou simplesmente de *ângulos do triângulo*. Os suplementos destes ângulos, obtidos pelo prolongamento de um lado, são chamados de ângulos externos do triângulo. Na figura ao lado, o ângulo e é ângulo externo ao triângulo $\triangle ABC$, adjacente ao ângulo $A\hat{B}C$.



1.24 Teorema. [Ângulo Externo] *Qualquer ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

Prova: Considere um $\triangle ABC$, denotemos a medida dos ângulos internos por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de acordo com o vértice de cada ângulo.
Hipótese: $\triangle ABC$ com $\hat{e}$ ângulo externo adjacente a $\hat{C}$.
Tese: $\hat{e} > \hat{A}$ e $\hat{e} > \hat{B}$.



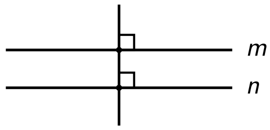
Considere M o ponto médio de AC e P um ponto pertencente à semi-reta $\overrightarrow{BM}$ de tal forma que $BM \equiv MP$. Pelo caso LAL, $\triangle BAM \equiv \triangle PMC$ e assim: $B\hat{A}M \equiv P\hat{C}M$. Como a semi-reta $\overrightarrow{CP}$ divide o ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$, temos $B\hat{A}M \equiv P\hat{C}M < \hat{e}$, ou seja, $\hat{e} > \hat{A}$. Analogamente, tomando o ponto médio de BC e usando ângulos opostos pelo vértice, poderemos concluir que $\hat{e} > \hat{B}$. □

Deixaremos para o leitor a demonstração dos seguintes resultados:

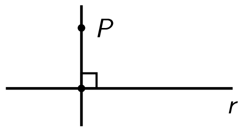
1.25 Proposição. A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que $180°$.

1.26 Corolário. Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.

1.27 Corolário. Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira, então m e n não se interceptam.



1.28 Proposição. Por um ponto fora de uma reta r passa uma única reta perpendicular a r.



Prova: Faremos esta demonstração em duas partes.
Parte 1: Existência ....
Pelo axioma 2 podemos considerar dois pontos A e B pertencentes a r. Pelo axioma 1 vamos considerar um ponto C que não pertence a r de tal modo que o $\triangle ABC$ seja isósceles. Pelo teorema 1.5 podemos considerar P o ponto médio do lado AB. Usando agora a proposição 1.20 temos que CP é a altura relativa ao lado AB, portanto é a perpendicular que queríamos obter.
Parte 2: Unicidade ....
Suponha que existam retas r_1 e r_2 e passando por C e perpendiculares a r. Usando Seja $P = r \cap r_1$, $Q = r \cap r_2$ e C. Considere o $\triangle PQC$. Pela proposição 1.25 temos que $\hat{P} + \hat{Q} = 180°$, o que representa uma contradição. Logo não podem existir duas retas r_1 e r_2 e nas condições dadas. □

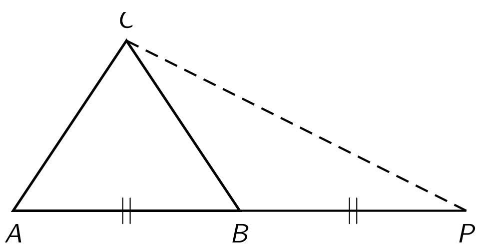
1.29 Proposição. Se dois lados de um triângulo não são congruentes então seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.

1.30 Proposição. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

Pratique! Agora é com você! Demonstre esta proposição.
Qualquer dúvida e/ou dificuldade, consulte o professor gestor da disciplina, por exemplo.

1.31 Teorema. Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.

Prova: Hipótese: $\triangle ABC$. Tese: $AB + BC > AC$.
Utilizando o resultado expresso no axioma 9, podemos considerar P um ponto sobre a semi-reta $\overrightarrow{AB}$ de modo que $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP}$. Temos que $CB \equiv BP$ e, portanto, o $\triangle BCP$ é isósceles com base CP. Logo, teremos $B\hat{C}P \equiv B\hat{P}C$. Como B está entre A e P, então $B\hat{C}P < A\hat{C}P$. Segue-se que no $\triangle ACP$ têm-se $B\hat{P}C < A\hat{C}P$. Logo, pela proposição anterior, $\overline{AC} < \overline{AP}$. Mas então, $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. □



1.32 Teorema. [Desigualdade Triangular] Dados três pontos distintos A, B e C do plano, tem-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se, e somente se, B pertence ao segmento AC.

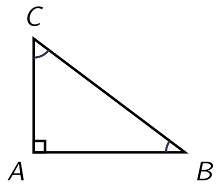
Utilize a proposição 1.28 e o teorema 1.32 para demonstrar a desigualdade triangular.

Importante! A desigualdade triangular é a única restrição para que se possa construir um triângulo com comprimento dos lados pré-determinados. Por exemplo, de acordo com esta desigualdade é impossível construir um triângulo cujos lados meçam 5, 3 e 9.

Demonstre a proposição a seguir como exercício.

1.33 Proposição. Sejam a, b e c três números positivos. Suponha que $|a-b| < c < a-b$. Então, pode-se construir um triângulo cujos lados medem a, b e c.

1.34 Definição. Em um triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa (BC, na figura), e os outros dois lados são denominados catetos (AC e AB, na figura).



Se dois triângulos retângulos são congruentes, então, necessariamente, os ângulos retos devem se corresponder. Por causa disto, além dos três casos de congruência que já conhecemos, existem outros três específicos para triângulos retângulos. Estes são apresentados no teorema seguinte, deixado como exercício.

1.35 Teorema. [Congruência de triângulos retângulos] Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são $\hat{C}$ e $\hat{C'}$. Se alguma das condições abaixo ocorrer, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$:

1. $BC \equiv B'C'$ e $\hat{A} \equiv \hat{A'}$
2. $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$ e
3. $AB \equiv A'B'$ e $\hat{A} \equiv \hat{A'}$.

Os casos acima podem ser identificados como igualdade entre

1. cateto e ângulo oposto;
2. hipotenusa e cateto;
3. hipotenusa e ângulo agudo.

1.18.1 Exercícios

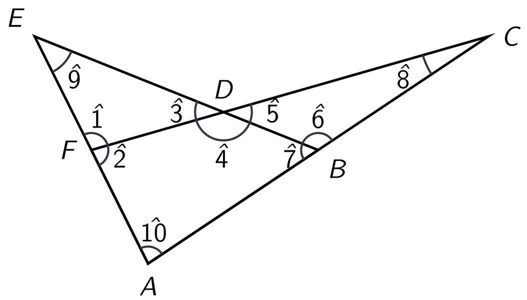
***EP* 1.114.** Prove que se um triângulo tem dois ângulos externos congruentes, então ele é isósceles.

***EP* 1.115.** A figura ao lado é formada pelos segmentos AC, AE, CF e EB. Determine os ângulos que são:

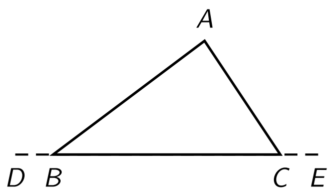
(a) menores do que o ângulo $\hat{7}$.

(b) maiores que o ângulo $\hat{5}$.

(c) menores do que o ângulo $\hat{4}$.



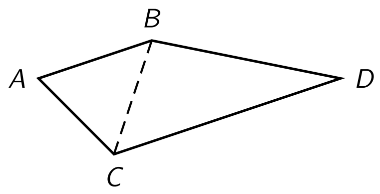
***EP* 1.116.** Na figura ao lado, os ângulos externos $A\hat{C}E$ e $A\hat{B}D$ e satisfazem a desigualdade: $A\hat{C}E < A\hat{B}D$. Mostre que $A\hat{B}D < A\hat{B}C$.



***EP* 1.117.** Prove que um triângulo retângulo tem dois ângulos externos obtusos.

***EP* 1.118.** Na figura abaixo tem-se $\overline{BD} > \overline{BC}$ e $\hat{A} > A\hat{B}C$. Prove que

$$\overline{BD} > \overline{AC}.$$



***EP* 1.119.** Na figura 1.119 H foi escolhido no segmento FG de sorte que $EH \equiv EG$. Mostre que $E\hat{H}F > E\hat{H}G$.

***EP* 1.120.** Se um $\triangle ABC$ é eqüilátero e D é um ponto do segmento BC mostre que $\overline{AD} > \overline{DB}$.

***EP* 1.121.** Na figura 1.121, $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Mostre que as retas m e n são paralelas.

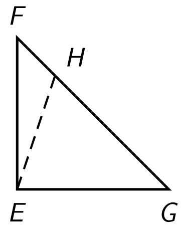


Figura 1.119

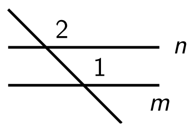


Figura 1.121

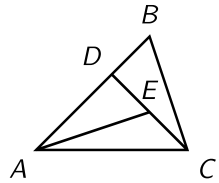


Figura 1.122

***EP* 1.122.** Na figura 1.122 B, D e A são colineares. Do mesmo modo D, E e C são colineares. Mostre que $A\hat{E}C > D\hat{B}C$.

***EP* 1.123.** Na figura 1.123, $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$ são congruentes e os pontos A, C e D são colineares. Mostre que $\overline{AD} > \overline{AB}$.

***EP* 1.124.** Na figura 1.124 tem-se $\hat{1} \equiv \hat{2}$ e $\hat{1} + \hat{2} = 180°$. Conclua que as retas m e n são paralelas.

***EP* 1.125.** Na figura 1.125 $\hat{B}$ e $\hat{D}$ e são ângulos retos e $AB \equiv DC$. Mostre que $AD \equiv BC$.

***EP* 1.126.** Na figura 1.126 AD e BC são segmentos. Mostre que $\overline{AD} + \overline{BC} > \overline{AB} + \overline{CD}$.

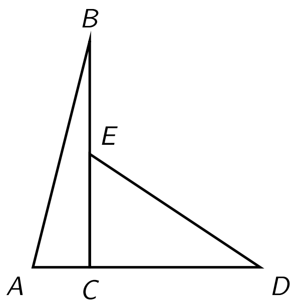


Figura 1.123

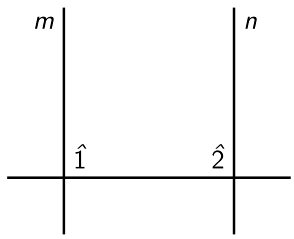


Figura 1.124

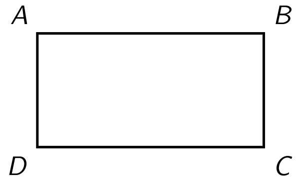


Figura 1.125

***EP* 1.127.** Duas retas m e n são cortadas por uma transversal formando ângulos α e γ como indicado na figura 1.127. Mostre que, se $\alpha + \gamma = 180°$, então m e n não se interceptam.

***EP* 1.128.** Na figura 1.128 AD e BC são congruentes e perpendiculares a CD. Mostre que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e são congruentes.

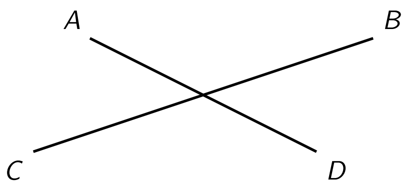


Figura 1.126

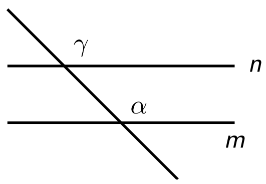


Figura 1.127

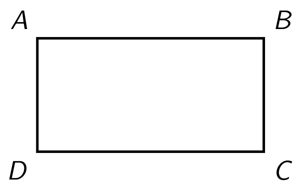


Figura 1.128

***EP* 1.129.** Dado um $\triangle ABC$, marca-se um ponto D no lado AB. Mostre que $\overline{CD}$ é menor que o comprimento de um dos lados AC ou BC.

***EP* 1.130.** Mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual $180°$. (Sugestão: Faça por absurdo, ou seja, suponha que existe um $\triangle ABC$ cuja soma dos ângulos seja maior do que $180°$).

tema 2 Paralelismo e Polígonos

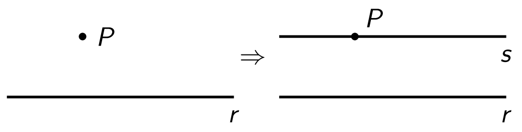
Paralelismo - Conseqüências e Aplicações

Veremos neste capítulo como duas retas do plano podem se posicionar, uma relativamente à outra. Estudaremos as conseqüências e as aplicações do paralelismo entre duas retas.

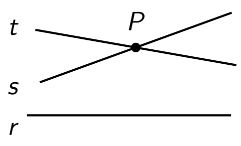
Dizemos que duas retas são

- ⋆ **concorrentes** — caso elas sejam do mesmo plano e possuam um único ponto em comum;
- ⋆ **paralelas** — caso elas sejam do mesmo plano e não possuam ponto em comum;
- ⋆ **coincidentes** — caso elas possuam todos os pontos em comum;
- ⋆ **reversas** — caso elas não possuam pontos em comum e ainda estejam em planos distintos.

Axioma 13. *Por um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta s paralela à reta r.*



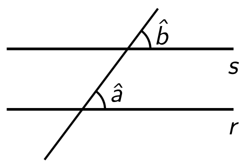
2.1 Proposição. Se a reta r é paralela às retas s e t, então s e t são paralelas ou coincidentes.

> **Prova:** Suponha que s e t não coincidem e são paralelas à reta r. Se s e t não fossem paralelas entre si, elas teriam um ponto de interseção, digamos P. Mas, então, s e t seriam distintas e paralelas à reta r passando por P. Isto contradiz o axioma 13.
>
> 
>

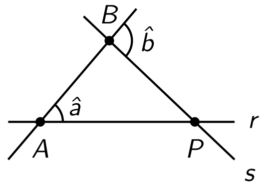
Pratique! || Agora é sua vez! Prove o seguinte resultado:

2.2 Corolário. Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.

2.3 Proposição. Sejam r, s, $\hat{a}$ e $\hat{b}$ como na figura à direita. Se $\hat{a} \equiv \hat{b}$, então $r//s$.

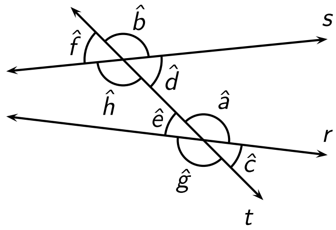


Prova: Hipótese: $\hat{a} \equiv \hat{b}$. Tese: r é paralela a s.
Suponha que r e s não são paralelas. Seja $P = r \cap s$, como representado na figura à direita, forma-se o $\triangle ABP$. Neste triângulo $\hat{a}$ é ângulo externo e $\hat{b}$ é ângulo interno não adjacente ao ângulo $\hat{a}$, ou vice-versa. Assim, pelo teorema do ângulo externo teríamos $\hat{a} \neq \hat{b}$ o que contradiz a hipótese. Portanto, r e s não se intersectam.



□

Quando duas retas r e s são cortadas por uma transversal t formam-se oito ângulos como indicado na figura ao lado.
Cada par destes ângulos recebe nomes especiais de acordo com a localização em relação à reta transversal t. Vejamos:



Ângulos Correspondentes – estão do mesmo lado da transversal. Um deles é externo e outro é interno, são eles: $\hat{a}$ e $\hat{b}$; $\hat{c}$ e $\hat{d}$; $\hat{e}$ e $\hat{f}$; $\hat{g}$ e $\hat{h}$.

Ângulos Alternos – estão em lados opostos da transversal. Ambos são esternos ou ambos são internos.

⋆ Alternos Internos: $\hat{a}$ e $\hat{h}$; $\hat{d}$ e $\hat{i}$.

⋆ Alternos Externos: $\hat{c}$ e $\hat{f}$; $\hat{b}$ e $\hat{g}$.

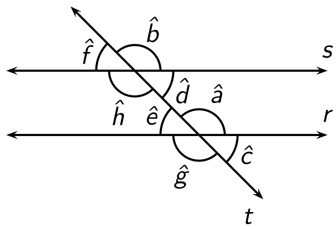
Ângulos Colaterais – estão na mesmo lado da reta transversal. Ambos são externos ou ambos são internos.

⋆ Colaterais Internos: $\hat{a}$ e $\hat{d}$; $\hat{e}$ e $\hat{h}$.

⋆ Colaterais Externos: $\hat{b}$ e $\hat{c}$; $\hat{f}$ e $\hat{g}$.

Atenção!

E se as retas r e s forem paralelas?
Muda alguma coisa? Muda sim!
Os nomes dos ângulos continuam os mesmos. Contudo, eles passam a apresentar as seguintes características:



(1) *Ângulos correspondentes congruentes.* Isto é, $\hat{a} = \hat{b}$; $\hat{c} = \hat{d}$; $\hat{e} = \hat{f}$ e $\hat{g} = \hat{h}$.

(2) *Ângulos alternos internos congruentes.* Ou seja, $\hat{a} = \hat{h}$ e $\hat{d} = \hat{e}$.

De fato. Como $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos correspondentes, temos $\hat{a} = \hat{b}$. Por outro lado, $\hat{b} = \hat{h}$ por serem opostos pelo vértice. Por transitividade temos $\hat{a} = \hat{h}$. Para mostrar que $\hat{d} = \hat{e}$ basta usar o mesmo raciocínio.

(3) *Ângulos colaterais suplementares.* Verifique!

Importante!

Em qualquer um dos casos (r e s paralelas ou não) note que $\hat{a} = \hat{g}$, $\hat{b} = \hat{h}$, $\hat{c} = \hat{e}$ e $\hat{d} = \hat{f}$, por serem opostos pelo vértice (OPV). Além disso, teremos que $\hat{b} + \hat{c} = 180°$. Inversamente, se $\hat{b} + \hat{c} = 180°$, então $\hat{a} \equiv \hat{b}$. Estas observações permitem reescrever a proposição 2.3 de duas maneiras distintas.

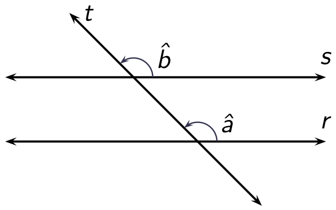
2.4 Proposição. Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal,

(a) obtivermos $\hat{b} + \hat{c} = 180°$, então as retas são paralelas;

(b) os ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas são paralelas.

***Nota* 8.** O axioma 13 permite-nos mostrar que a inversa desta proposição é também verdadeira que também pode ser demonstrada por contradição.

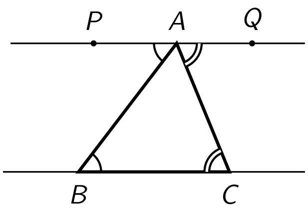
2.5 Proposição. Considere r e s retas paralelas e t uma transversal a r e s. Então, os ângulos correspondentes são congruentes.



O teorema seguinte é conseqüência direta do axioma 13 e é um dos resultados mais importantes da Geometria Plana. Em Geometrias Não-Euclidianas, este teorema é falso.

2.6 Teorema. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.

Prova: Considere um $\triangle ABC$ com ângulos internos indicados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
Hipótese: $\triangle ABC$. Tese $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.



Pelo axioma 13 podemos, pelo ponto A traçar a (única) reta r paralela à reta que contém o segmento BC. Sejam P e Q pontos sobre r tais que A está entre P e Q. Note que $P\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}Q = 180°$ por construção. $P\hat{A}B = \hat{B}$ e $C\hat{A}Q = \hat{C}$, por correspondência de ângulos (alternos internos). Daí $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. $\square$

Os resultados no corolário seguinte são conseqüências imediatas do teorema 2.6. Procure justificá-los e faça uma figura para cada deles.

2.7 Corolário.

(a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é $90°$.

(b) Cada ângulo de um triângulo eqüilátero mede $60°$.

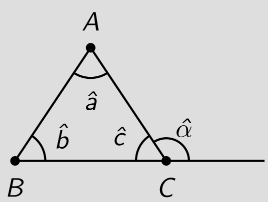
(c) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

(d) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$.

***ER* 2.1.** Demonstre os itens (a) e (c) do corolário acima.

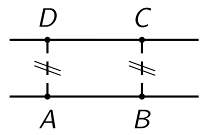
Solução: (a) Seja ABC um triângulo retângulo em $\hat{A}$, ou seja, $\hat{A} = 90°$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$, temos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, visto que $\hat{A} = 90°$ segue que $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

(c) Considere o triângulo ABC indicado na figura ao lado. Queremos mostrar que $\hat{\alpha} = \hat{a} + \hat{b}$.
De fato, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$, em particular, temos $\hat{a} + \hat{b} = 180° - \hat{c}$. Por outro lado, os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{\alpha}$ são suplementares, ou seja $\hat{c} + \hat{\alpha} = 180°$, donde $\hat{\alpha} = 180° - \hat{c}$. Concluímos assim que $\hat{\alpha} = \hat{a} + \hat{b}$.



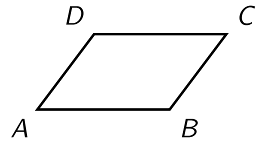
O teorema seguinte também é conseqüência direta do axioma 13.

2.8 *Teorema*. Se r e s são retas paralelas, então os pontos de r estão à mesma distância da reta s.

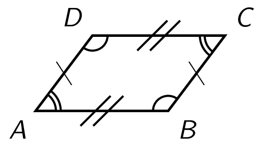


A inversa deste teorema é também verdadeira e sua demonstração é proposta como exercício.

Nota 9. Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Denotaremos um paralelogramo pela ordem de seus vértices. Observe na figura ao lado que $ABCD$ é um paralelogramo pois, AB é paralelo a DC e AD paralelo a BC.



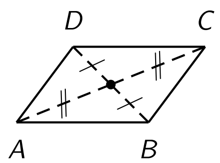
2.9 *Proposição*. Em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.



Prova: Seja $ABCD$ um paralelogramo. Trace a diagonal AC. Como AB e DC são paralelos, então $B\hat{A}C \equiv A\hat{C}D$. Como AD e BC são paralelos, então $C\hat{A}D \equiv A\hat{C}B$. Como, além disso, AC é uma lado comum aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDA$, então estes triângulos são congruentes. Logo, $\hat{B} \equiv \hat{D}$, $AB \equiv CD$ e $BC \equiv DA$. É fácil ver que $\hat{A} \equiv \hat{C}$. $\square$

Pratique! Vamos ver se você está atento!
Prove a seguinte proposição.

2.10 *Proposição*. As diagonais de um paralelogramo se interceptam em um ponto que é ponto médio das duas diagonais.



As duas proposições a seguir são resultados que oferecem condições suficientes para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

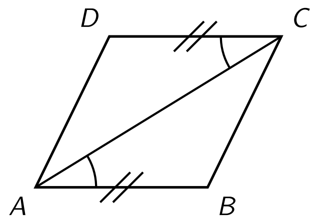
2.11 *Proposição*. Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.

Prova: Considere o quadrilátero $ABCD$. Seja AC uma diagonal de $ABCD$ e considere os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle CAB$.
Hipótese: $AB \equiv CD$ e $BC \equiv AD \Rightarrow$. Tese: $AB//CD$ e $BC//DA$.
Pela congruência de triângulos, caso LLL, temos que $\triangle ACD \equiv \triangle CAB$, daí $C\hat{A}D \equiv A\hat{C}B$. Pela proposição 2.3 tem-se que $BC//DA$ e, assim, $D\hat{C}A \equiv B\hat{A}C$. Utilizando a proposição 2.3 mais uma vez, $AB//CD$. $\square$

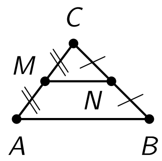
Pratique! Será um bom exercício provar que.

2.12 *Proposição*. Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

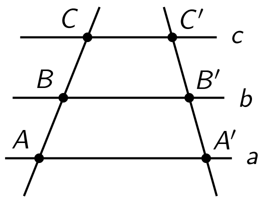
Prova: Seja $ABCD$ um quadrilátero. Suponha que os lados AB e CD sejam congruentes e paralelos. Considerando a diagonal AC temos $D\hat{C}A = C\hat{A}B$ (alternos internos).
Como, por hipótese, $\overline{DC} = \overline{AB}$, segue que os triângulos DCA e CAB são congruentes, Pelo caso de congruências LAL. Em particular, $\overline{DA} = \overline{CB}$. Logo, pela proposição 2.11, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.



2.13 Teorema. [Base Média] O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.



2.14 Proposição. Suponha que três retas paralelas, a, b e c, cortam as retas m e n nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C, então o ponto B' também encontra-se entre A' e C'. Se $AB = BC$, então também tem-se $A'B' = B'C'$.



A proposição anterior pode ser generalizada de maneira quase imediata para o caso em que as duas transversais cortam um número qualquer (maior ou igual a três) de retas paralelas.

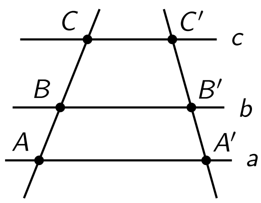
2.15 Corolário. Suponha que k retas paralelas $a_1, a_2, \ldots a_k$ cortam duas retas m e n nos pontos $A_1, A_2, \ldots A_k$ e nos pontos $A'_1, A'_2, \ldots A'_k$, respectivamente. Se $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{k-1}A_k$, então $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \ldots = A_{k-1'}A'_k$.

2.1 Segmentos Proporcionais

Vamos estudar os segmentos proporcionais. Preste bem atenção!

Dados dois segmentos AB e CD, existe um único número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{CD}$. Se o número α é racional, dizemos que os segmentos AB e CD são comensuráveis. Caso contrário, eles são chamados incomensuráveis.

Considere um feixe de retas paralelas (três ou mais retas) coplanares e duas retas transversais, de acordo com a figura. Chamamos de segmentos correspondentes, os segmentos contidos em transversais diferentes mas entre as mesmas paralelas. Neste caso, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são proporcionais, conforme o Teorema de Tales logo abaixo.



Se uma transversal t_1 a um feixe de retas paralelas é dividida em n partes congruentes, então outra transversal t_2 a este feixe será também dividida em n partes congruentes entre si.

De fato, se consideramos que a transversal t_2 for dividida em uma quantidade menor de partes, $n-1$ por exemplo, teremos que duas paralelas deveriam se cruzar para que tal fato ocorresse. Um absurdo. O caso contrário também é um absurdo, ou seja, se na transversal t_2 tivéssemos uma quantidade maior de partes.

Atenção! Provamos, até agora, que o número de partes que um feixe de paralelas produz em transversais é o mesmo. Falta deduzir que os segmentos são iguais entre si.

Trace segmentos de retas paralelos à transversal t_1 tal que uma de suas extremidades seja o ponto de divisão produzidos pela interseção do feixe retas a t_2. Paralelogramos então são formados. Conseqüentemente, é formada uma seqüência de triângulos congruentes na transversal t_2 pelo critério ALA. Desta forma, os segmentos que estão na transversal t_2 são iguais entre si.

2.16 Teorema. [Teorema de Tales] Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão de dois pares de segmentos correspondentes são iguais.

Prova: Hipótese: Duas retas transversais a um feixe de retas paralelos. Tese: razão de dois pares de segmentos correspondentes são iguais.

A demonstração do teorema possui duas partes:

1ª parte: Segmentos comensuráveis. ....

Suponha que possamos dividir um segmento AB sobre a transversal t_1 em α partes de mesmo tamanho a e um segmento CD, sobre esta mesma transversal, em β partes de mesmo tamanho a. Pelo resultado constatado anteriormente temos que sobre a transversal t_2 existirão α segmentos de retas de mesmo tamanho a' constituindo-se um segmento $A'B'$ de comprimento $\alpha \cdot a'$. Da mesma forma, teremos β segmentos de retas de mesmo tamanho a' constituindo-se um segmento $C'D'$ de comprimento $\beta \cdot a'$.

Como, $\overline{AB} = \alpha \cdot a$ e $\overline{A'B'} = \alpha \cdot a'$, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{a}{a'}$. Além disso, $\overline{CD} = \beta \cdot a$ e $\overline{C'D'} = \beta \cdot a'$, $\dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{a}{a'}$.

Portanto,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

2ª parte: Segmentos incomensuráveis. ....

Seja a submúltiplo comum de $\overline{AB}$, ou seja, $AB = \alpha \cdot a, \alpha \in \mathbb{Z}$, mas não é submúltiplo de $\overline{CD}$. Seja $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta \cdot a < \overline{CD} < (\beta + 1) \cdot a$. Dividindo-se esta desigualdade por $\overline{AB}$ temos,

$$\frac{\beta \cdot a}{AB} < \frac{CD}{AB} < \frac{(\beta+1)\cdot a}{AB} \Rightarrow \frac{\beta \cdot a}{\alpha \cdot a} < \frac{CD}{AB} < \frac{(\beta+1)\cdot a}{\alpha \cdot a} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} < \frac{CD}{AB} < \frac{\beta+1}{\alpha}.$$

Aplicando-se o resultado na transversal t_2 temos que $\overline{A'B'} = \alpha \cdot a'$ e $\beta \cdot a' < \overline{C'D'} < (\beta+1) \cdot a'$. Logo,

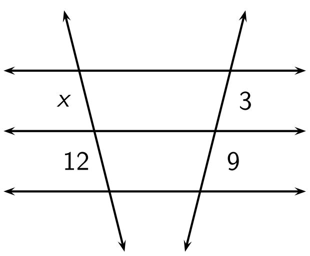
$$\frac{\beta \cdot a'}{\overline{A'B'}} < \frac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}} < \frac{(\beta+1)\cdot a'}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \frac{\beta \cdot a'}{\alpha a'} < \frac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}} < \frac{(\beta+1)\cdot a'}{\alpha a'} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}} < \frac{\beta+1}{\alpha}$$

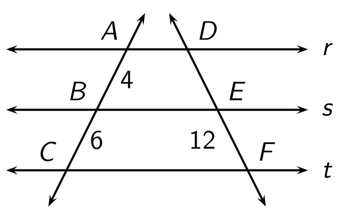
Esta desigualdade e a anterior definem um único número real, assim:

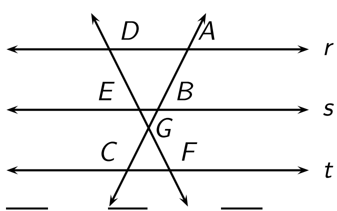
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}}. \quad \square$$

***ER* 2.2.** Sabendo que r, s e t são retas paralelas, determine

(a) o valor de x; (b) o valor de $\overline{DF}$; (c) o valor de $\overline{EG}$.







$\overline{CG} = 6, \overline{FG} = 10, \overline{BG} = 2$

Solução:

(a) Pelo teorema de Tales, $\dfrac{x}{12} = \dfrac{3}{9}$. Aplicando-se o produto dos meios igual ao produto dos extremos, temos $9x = 36$. Segue que $x = 4$.

(b) Façamos $\overline{DF} = x$. Portanto, $\dfrac{x}{12} = \dfrac{4+6}{6}$. Aplicando-se o produto dos meios igual ao produto dos extremos, temos $6x = 12 \cdot 10$. Logo, $x = 20$.

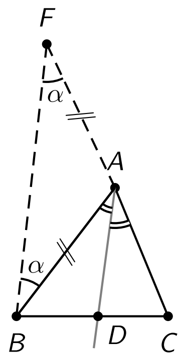
(c) Neste exemplo temos as transversais se cruzando. Fazendo $\overline{EG} = x$ e aplicado-se corretamente o teorema de Tales, temos: $\dfrac{x}{10} = \dfrac{2}{6}$. O produto dos meios é igual ao produto dos extremos, ou seja, $6x = 20$. Logo, $x = \dfrac{10}{3}$.

2.2 Teoremas das Bissetrizes

Os dois teoremas das bissetrizes são resultados de aplicação do teorema de Tales. O problema se resume em determinar a posição de corte que a bissetriz determina no lado oposto de um triângulo qualquer.

2.17 Teorema. [da bissetriz interna] Uma bissetriz interna de um triângulo qualquer divide o lado oposto em dois segmentos aditivos proporcionais aos lados adjacentes.

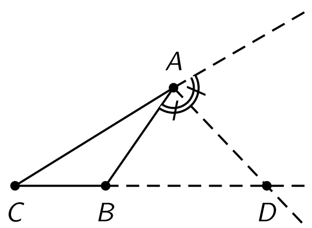
Prova: Considere um triângulo qualquer com vértices nos pontos A, B e C e D um ponto tal que AD é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.



Prolongue o lado AC a um segmento AF tal que sua medida seja igual a c. O triângulo com vértices em A, B e F é isósceles e façamos $A\hat{B}F = A\hat{F}B = \alpha$. O ângulo $B\hat{A}C$ é externo do triângulo $\triangle AFB$. Portanto, $B\hat{A}C = 2\alpha$ e como AD é bissetriz, $C\hat{A}D = B\hat{A}D = \alpha$. AB é transversal a AD e a BF e como os ângulos alternos internos são iguais, temos que AD é paralelo a BF. Segue, pelo Teorema de Tales, que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}.$$

2.18 Teorema. [da bissetriz externa] Uma bissetriz de um ângulo externo intercepta o prolongamento do lado oposto e o divide em dois segmentos subtrativos proporcionais aos lados adjacentes.



Em outros termos, no triângulo ABC da figura ao lado, seja AD a bissetriz do ângulo externo no vértice A. Com as anotações da figura, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}.$$

Prova: Tente fazer como exercício!

***ER* 2.3.** Sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz interna de um triângulo com vértices em A, B e C e que $\overline{AC} = 6$, $\overline{AB} = 9$ e $\overline{CD} = 2$, calcule $\overline{CB}$.

Solução: Façamos $\overline{BD} = x$. Pelo teorema da bissetriz interna, $\dfrac{2}{x} = \dfrac{6}{9}$. O produto dos meios é igual ao produto dos extremos, portanto $6x = 18$. Logo, $x = 3$.

***ER* 2.4.** Sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz externa de um triângulo com vértices em A, B e C e que $\overline{AC} = 20$, $\overline{AB} = 40$ e $\overline{BD} = 60$, calcule $\overline{BC}$.

Solução: Façamos $\overline{BC} = x$. Logo, $\overline{CD} = 60 - x$. Pelo teorema da bissetriz externa, $\frac{60}{60 - x} = \frac{40}{20} = 2$, ou seja, $60 = 120 - 2x$. Segue que $x = 30$.

2.2.1 Exercícios

***EP* 2.5.** Prove que cada ângulo de um triângulo eqüilátero mede $60°$.

***EP* 2.6.** Prove que a medida do ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes.

***EP* 2.7.** O que é maior, a base ou a lateral de um triângulo isósceles cujo ângulo oposto à base mede $57°$?

***EP* 2.8.** Quanto medem os ângulos de um triângulo se eles estão na mesma proporção que os números 1, 2 e 3?

***EP* 2.9.** Se um triângulo retângulo possui um ângulo que mede $30°$, mostre que o cateto oposto a este ângulo mede a metade da hipotenusa.

***EP* 2.10.** Seja $\triangle ABC$ isósceles com base AB. Sejam M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente. Mostre que, o reflexo do ponto C relativamente à reta que passa por M e N é exatamente o ponto médio do segmento AB.

***EP* 2.11.** Um retângulo é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos retos. Mostre que todo retângulo é um paralelogramo.

***EP* 2.12.** Mostre que as diagonais de um retângulo são congruentes.

***EP* 2.13.** Um losango (também denominado, rombo) é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes. Mostre que as diagonais de um losango cortam-se em ângulos retos e são bissetrizes dos ângulos internos do losango.

***EP* 2.14.** Um quadrado é um retângulo que também é um losango. Mostre que, se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se cortam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um retângulo. Se, além disso, as diagonais são perpendiculares uma à outra, então o quadrilátero é um quadrado.

***EP* 2.15.** Um trapézio é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados bases e os outros dois são denominados laterais. Um trapézio é dito isósceles se suas laterais são congruentes. Seja $ABCD$ um trapézio em que AB é uma base. Se ele é isósceles, mostre que $\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$.

***EP* 2.16.** Mostre que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

***EP* 2.17.** Mostre que, em um paralelogramo os ângulos dos vértices consecutivos são suplementares.

***EP* 2.18.** Se as diagonais de um quadrilátero convexo têm o mesmo comprimento, o que pode ser dito sobre ele?

***EP* 2.19.** Um triângulo tem dois ângulos que medem $20°$ e $80°$. Determine a medida de todos os seus ângulos externos.

***EP* 2.20.** Considere um ângulo de vértice A e seja O um ponto na região limitada por ele. Sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas de O aos lados do ângulo. Qual a medida do ângulo $M\hat{O}N$ se a medida de $\hat{A}$ for $20°$?

***EP* 2.21.** Pode existir um triângulo ABC em que a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ e a bissetriz do ângulo externo no vértice B sejam paralelas?

***EP* 2.22.** Determine os ângulos de um triângulo retângulo isósceles.

***EP* 2.23.** Por que um triângulo não pode ter dois ângulos externos agudos?

***EP* 2.24.** Pode um ângulo externo de um triângulo ser menor do que o ângulo interno que lhe é adjacente?

***EP* 2.25.** Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Mostre que a bissetriz do seu ângulo externo no vértice A é paralela a sua base.

Gabarito

EP 2.8. $30°$, $60°$ e $90°$. **EP** 2.19. $160°$, $100°$, $100°$. **EP** 2.20. $160°$. **EP** 2.21. Não. **EP** 2.21. $90°$, $45°$, $45°$. **EP** 2.21. Seus suplementos seriam obtusos e a sua soma resultaria num ângulo maior que $180°$. **EP** 2.24. Sim. Basta que o triângulo seja obtusângulo.

Semelhança de Triângulos

2.3 Introdução

O conceito de semelhança era conhecido pelos gregos antes mesmo do Teorema de Pitágoras, tanto é que o teorema fundamental de semelhança é conhecido como teorema de Thales, um tributo a Thales de Mileto ($630 - 550$ a.C.). Thales é o mais antigo entre os sábios da Grécia antiga. Ele se tornou célebre ao predizer o eclipse do Sol em 585 a.C. A cosmologia de Thales, na qual a água constitui o princípio e a origem do universo, foi uma das primeiras pesquisas sobre a natureza realizada pelos jônios.

2.4 Triângulos Semelhantes

2.19 Definição (Semelhança de Triângulos)**.** *Dois triângulos ABC e XYZ são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Com isto queremos dizer que, se $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são triângulos semelhantes e se $A \to X$, $B \to Y$ e $C \to Z$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} \equiv \hat{X}, \hat{B} \equiv \hat{Y}, \hat{C} \equiv \hat{Z} \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{YZ}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{ZX}} = k. \tag{2.1}$$

O quociente 2.1, comum entre as medidas dos lados correspondentes, é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos.

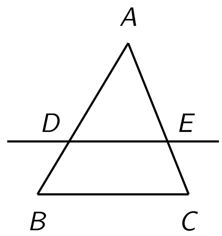
***Nota* 10.** Dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um são congruentes.

A definição de semelhança requer que conheçamos números reais, uma vez que a razão 2.1 é real. Lembramos que os gregos não conheciam números reais da mesma forma que conhecemos atualmente. Eles conheciam números racionais e tiveram a noção de que existem números que não são racionais ainda no tempo de Pitágoras, sendo $\sqrt{2}$ o primeiro e o mais conhecido deles. Devido à existência dos “irracionais” é que foi desenvolvida, pelos gregos, a noção de comensurável.

Já sabemos que dois segmentos AB e CD são ditos comensuráveis se existirem números inteiros p e q tais que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{p}{q}$. Mostra-se que em um quadrado de lado medindo 1 unidade, a razão entre a medida do lado e a diagonal $(\sqrt{2})$ é não comensurável.

2.20 Teorema. Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

Prova: Seja $\triangle ABC$. Considere uma reta paralela ao lado BC que corta os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E, como representado na figura ao lado. Queremos provar que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$. Para isto, tome um pequeno segmento AP_1 na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ de modo que as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}}$ e $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$ não sejam números inteiros.



Consideremos na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ os pontos $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$, tais que $k \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP}_k$, para todo $k \geq 2$. Existem então dois números inteiros m e n tais que: D está entre P_m e P_{m+1} e B está entre P_n e P_{n+1}. Tem-se portanto:

$$m \cdot \overline{AP_1} < \overline{AD} < (m+1) \cdot \overline{AP_1} \quad \text{e} \quad n \cdot \overline{AP} < \overline{AB} < (n+1) \cdot \overline{AP_1}.$$

Podemos concluir destas desigualdades que:

(a) $\dfrac{m}{n+1} < \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \dfrac{m+1}{n}$.

Tracemos pelos pontos $P_1, P_2, \ldots P_{n+1}$ retas paralelas a BC. Estas retas, segundo o corolário 2.15, cortam a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ em pontos $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n+1}$, os quais também satisfazem a $k \cdot \overline{AQ_1} = \overline{AQ_k}$, para todo k, $2 \leq k \leq n+1$. Além disso, o ponto E encontra-se entre Q_m e Q_{m+1} e o ponto C entre Q_n e Q_{n+1}. O mesmo raciocínio feito acima pode ser repetido aqui obtendo-se como resultado a desigualdade:

(b) $\dfrac{m}{n+1} < \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \dfrac{m+1}{n}$.

As desigualdades (a) e (b) permitem-nos concluir que

(c) $\left| \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \dfrac{m+1}{n} - \dfrac{m}{n+1}$.

Observe que, como $m \leq n$, então $\dfrac{m+1}{n} - \dfrac{m}{n+1} = \dfrac{m+n+1}{n(n+1)} \leq \dfrac{2n+2}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n}$, ou seja, as razões $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ e $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ diferem por não mais do que $\dfrac{2}{n}$. Quanto menor for o segmento AP_1 tanto maior será o número n e tanto menor será o quociente $\dfrac{2}{n}$. Como o lado esquerdo da desigualdade (c) não depende de n, só podemos concluir que os quocientes $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ e $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ são iguais. □

O teorema a seguir relaciona semelhança com os casos de congruência. As demonstrações dos teoremas a seguir ficam como exercício para o leitor.

2.21 Teorema. [1º caso de semelhança de triângulos] Dados $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

2.22 Teorema. [2º caso de semelhança de triângulos] Se, em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.

2.23 Teorema. [3º caso de semelhança de triângulos] Se, em dois triângulos ABC e EFG, tem-se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$, então os dois triângulos são semelhantes.

Importante! Dois polígonos são semelhantes quando existe uma correspondência entre seus vértices de sorte que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais numa mesma razão. Assim, um polígono convexo $A_1A_2\ldots A_n$ é congruente a um outro $A'_1A'_2\ldots A'_n$ se, e só se, $\hat{A}_1 = \hat{A'_1}$, $\hat{A}_2, = \hat{A'_2}$, $\ldots \hat{A}_n = \hat{A'_n}$, e

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A'_1A'_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A'_2A'_3}} = \ldots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{A_{n-1'}A'_n}}.$$

De fato, a noção de figuras semelhantes se estende muito além dos simples polígonos convexos. Quando comparamos uma foto e sua ampliação temos claramente duas figuras semelhantes. No caso, temos uma grande quantidade de pontos correspondentes e a distância entre eles é multiplicada por um determinado fator de ampliação (2 vezes, 3 vezes, etc). Os mapas pretendem ser representações esquemáticas de regiões, onde as distâncias lineares entre pontos representam as distâncias reais quando multiplicadas por um fator fixo. As plantas baixas de casas e apartamentos são outros exemplos de representação de uma situação real de modo que as distâncias na planta representam as distâncias reais quando multiplicadas pelo fator de conversão usado na elaboração da planta.

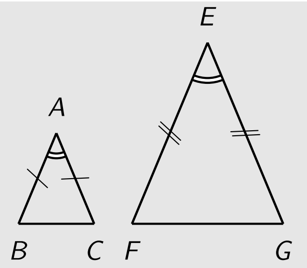
2.4.1 Exercícios

***EP* 2.26.** Mostre que dois triângulos eqüiláteros são sempre semelhantes.

***ER* 2.27.** Mostre que são semelhantes dois triângulos isósceles que têm iguais os ângulos opostos à base.

Solução: Sejam ABC e EFG triângulos isósceles de bases BC e FG, respectivamente. Daí $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{EF} = \overline{EG}$. Consequentemente,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}.$$



Por outro lado, por hipótese temos $A\hat{A}C = F\hat{E}G$. Portanto, pelo caso LAL, os triângulos ABC e EFG são semelhantes.

***EP* 2.28.** Seja D o ponto médio do segmento AB e E é ponto médio do segmento AC. Mostre que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

***ER* 2.29.** Os lados de um triângulo ABC medem $6\ m$, $9\ m$ e $12\ m$. Em um triângulo EFG semelhante a este, o menor lado mede $30\ m$. Determine a medida dos outros lados.

Solução: Sejam x, y e z as medidas dos lados do triângulo EFG. Pela semelhança entre os triângulos ABC e EFG temos:

$$\frac{6}{x} = \frac{9}{y} = \frac{12}{z}.$$

Como o menor lado do $\triangle EFG$ mede $30\ cm$ temos que $x = 30$, visto que o menor lado do $\triangle ABC$ mede $6\ cm$. Daí

$$\frac{6}{30} = \frac{9}{y} \quad \Rightarrow \quad y = 45$$
$$\frac{6}{30} = \frac{12}{z} \quad \Rightarrow \quad z = 60$$

portanto, os outros lados do $\triangle EFG$ medem $45\ cm$ e $60\ cm$.

***EP* 2.30.** Os lados de um triângulo medem $9\ cm$, $17\ cm$ e $21\ cm$. Determine os lados de um segundo triângulo sabendo que ele é semelhante ao primeiro e que seu perímetro (soma das medidas dos lados) é $141\ cm$.

***EP* 2.31.** Como no caso de triângulos, quando duas figuras são semelhantes, chama-se razão de semelhança ao quociente dos comprimentos dos segmentos correspondentes. Sabe-se que a razão de semelhança entre um triângulo eqüilátero T_1, cujo lado mede $28\ cm$, e um triângulo T_2 é $4/7$. Determine o comprimento dos lados do segundo triângulo.

***EP* 2.32.** Dois retângulos são semelhantes. A base do primeiro mede $15\ cm$ e sua altura $6\ cm$. Ache os lados do segundo retângulo sabendo que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo é 2.

***EP* 2.33.** Dois retângulos são semelhantes. A base do primeiro mede $3\ cm$ e sua altura $2\ cm$. A base do segundo mede $10\ cm$. Determine a altura do segundo e a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo retângulo.

***EP* 2.34.** Dois retângulos são semelhantes. Sendo $3,5\ cm$ a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo. Se o perímetro do primeiro é $10\ cm$, qual o perímetro do segundo?

***EP* 2.35.** Dois paralelogramos são congruentes e a razão de proporcionalidade do primeiro para o segundo é a. Mostre que a razão entre o comprimento de uma diagonal do primeiro e da correspondente diagonal do segundo também é a.

***EP* 2.36.** Na planta de uma cidade, desenhada na escala $1 : 6.000$, a distância entre o local da Catedral e o do estádio de futebol é de $45\ cm$. Qual a distância verdadeira entre os dois locais?

***EP* 2.37.** A sombra, sobre o solo, de um bastão de $7\ m$ colocado na vertical, mede $3\ m$. Estime a altura de um edifício, na mesma região, cuja sombra, no mesmo instante, mede $27\ m$.

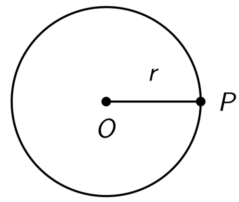
2.5 Pontos Notáveis do Triângulo

Os lugares geométricos a seguir serão apresentados com o intuito de entender a relação existente entre eles e os pontos notáveis do triângulo.

2.5.1 Lugares Geométricos

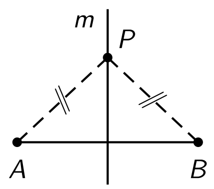
***2.24 Definição* (LG).** *O lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade.*

2.25 Definição (Circunferência)**.** *Uma circunferência $S = S(O, r)$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que eqüidistam de um ponto fixo dado.*



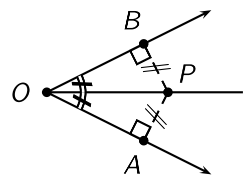
$$P \in S \Leftrightarrow d(P, O) = r.$$

2.26 Definição (Mediatriz)**.** *É o lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistante de dois pontos dados.*



$$P \in m \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$$

2.27 Definição (Bissetriz)**.** *É o lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistante dos lados de um ângulo.*



2.5.2 Cevianas de um Triângulo

2.28 Definição. *Qualquer segmento que une o vértice de um triângulo até um ponto da reta suporte do lado oposto é chamado ceviana.*

A seguir vamos apresentar as principais cevianas de um triângulo:

⋆ **Altura** – Ceviana que é perpendicular ao lado do triângulo.

Em um triângulo retângulo em A, o lado c é a altura relativa ao lado b, enquanto que, o lado b é a altura relativa ao lado c.

Em um triângulo obtusângulo em A, a altura relativa h_b ao lado b é um segmento formado com o auxílio do prolongamento do lado b.

⋆ **Mediana** – Ceviana que une o vértice do triângulo até o ponto médio do lado oposto.

⋆ **Bissetriz interna** – Ceviana que pertence à bissetriz do ângulo interno do triângulo.

⋆ **Bissetriz externa** – Ceviana que pertence à bissetriz do ângulo externo do triângulo.

2.5.3 Pontos Notáveis do Triângulo

2.29 Teorema. [Baricentro] As medianas de um triângulo se encontram num ponto G chamado baricentro. Este divide cada mediana em dois segmentos que estão na razão $2 : 1$.

Prova: Considere M_1, M_2 e M_3 os pontos médios, respectivamente, dos lados BC, AC e AB de um triângulo de vértices em A, B e C. As medianas $\overline{BM_2}$ e $\overline{CM_3}$ se cruzam em X (não sabemos ainda se é o baricentro).
$\overline{M_2M_3}$ é base média do triângulo $\triangle ABC$, relativa ao lado BC. Assim, $\overline{M_2M_3}$ é paralelo $\overline{BC}$ e $M_2M_3 = \dfrac{BC}{2}$.
Tomamos os pontos D e E, pontos médios dos segmentos $\overline{CX}$ e $\overline{BX}$, respectivamente. $\overline{DE}$ é base média do triângulo $\triangle XBC$, relativa ao lado BC. Assim, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e $DE = \dfrac{BC}{2}$.
Concluímos então que DE é paralelo a M_2M_3 e $DE = M_2M_3$. Assim, o quadrilátero M_2M_3ED é um paralelogramo, cuja propriedade principal é que suas diagonais se cruzam no ponto médio.
Podemos então dizer que $DX = XM_3$, mas: $DX = \dfrac{CX}{2}$. Logo, $\dfrac{CX}{2} = XM_3$, ou seja, $CX = 2XM_3$. Analogamente, obtemos $BX = 2XM_2$. Considere agora as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{BM_2}$.
As medidas $\overline{AM_1}$ e $\overline{BM_2}$ se cruzam em Y. O procedimento é análogo ao das medianas $\overline{CM_1}$ e $\overline{CM_2}$, e vamos concluir que $BY = 2YM_2$ e $AY = 2YM_1$.
Demonstramos que $BX = 2XM_2$. Logo, os pontos X e Y são coincidentes.
A união de todos os resultados comprovam que as medianas concorrem num mesmo ponto (baricentro) e que dividem as medianas em segmentos na razão $2:1$ □

2.30 Teorema. [Incentro] As bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo concorrem num ponto que é o centro da circunferência inscrita no triângulo e, por isso, é chamado incentro.

Prova: Exercício.

2.31 Teorema. [Circuncentro] O ponto de encontro das mediatrizes dos lados do triângulo definem um ponto que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo e, por isso, chamado circuncentro.

Prova: As medianas r e s são os LG dos pontos eqüidistantes de B e C e de A e B, respectivamente. Então o cruzamento de r e s é o ponto eqüidistante dos vértices A, B e C. Claramente, a terceira mediatriz tem ponto comum ao ponto de interseção de r e s. □

2.32 Teorema. [Ortocentro] As alturas de um triângulo concorrem num ponto chamado ortocentro.

Prova: Pelos vértices do $\triangle ABC$ traçamos retas paralelas aos lados opostos e construímos o Triângulo $A'B'C'$. Observe que $ACBC'$ e $ACA'B$ são paralelogramos e que $AC = BA'$ e $AC = C'B$. Logo, B é ponto médio de $A'C'$.
Como $\overline{AC}||\overline{A'C'}$ e $h_b \perp \overline{AC} \Rightarrow h_b \perp \overline{A'C'}$.
As alturas do $\triangle A'B'C'$ pertencem às mediatrizes do $\triangle A'B'C'$. Portanto, como as mediatrizes concorrem num ponto, as alturas também concorrem num ponto. □

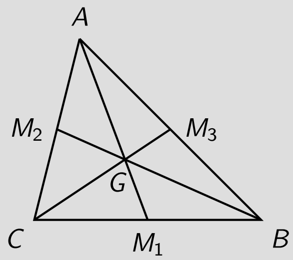
2.33 Teorema. [Ex-incentro] As bissetrizes externas de dois ângulos de um triângulo e a interna do terceiro ângulo concorrem em um ponto chamado ex-incentro, que é o centro da circunferência tangente a um dois lados e aos prolongamentos dos outros dois.

Importante! Num triângulo eqüilátero, os pontos notáveis são coincidentes, pois, neste triângulo a altura é bissetriz, mediana e mediatriz.

***ER* 2.38.** No triângulo $\triangle ABC$, G é baricentro. Calcule x; y e z sabendo que $\overline{AG} = 12$, $\overline{GM_3} = 4$, $\overline{GB} = 10$, $\overline{GM_1} = x$, $\overline{GC} = y$ e $\overline{GM_2} = z$.

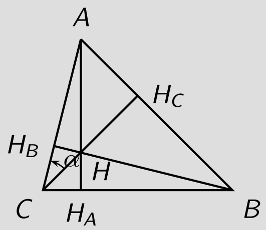
Solução: Como G é baricentro, divide cada mediana em segmentos na razão $2:1$. Assim:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2z & = & 10 \\ y & = & 2\cdot 4 \\ 2x & = & 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 5 \\ y & = & 8 \\ x & = & 6 \end{array}\right.$$



***ER* 2.39.** Num triângulo ABC, H é o seu ortocentro e $B\hat{H}C = 140°$. Calcule $B\hat{A}C$.

Solução: De acordo com o enunciado, podemos construir a figura ao lado. Os triângulos $\triangle AH_cC$ e $\triangle HH_BC$ são semelhantes e α é o ângulo comum. Assim, $\hat{A} = C\hat{H}H_B$, $\hat{A} = 180° - B\hat{H}C$. Logo, $\hat{A} = 40°$.



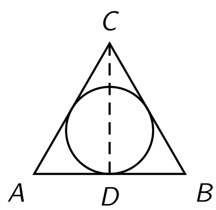
2.5.4 Exercícios

***EP* 2.40.** Determine a soma dos ângulos internos de um

(a) pentágono. (b) eneágono. (c) quadrilátero não-convexo.

***EP* 2.41.** Seja r o raio, em cm, da circunferência inscrita em um triângulo retângulo com catetos medindo $6\ m$ e $8\ cm$. Quanto vale $24r$?

***EP* 2.42.** Na figura ao lado, o triângulo ABC é eqüilátero e está circunscrito ao círculo de centro 0 e raio $2\ cm$. $\overline{CD}$ é altura do triângulo. Determine a medida do raio da circunferência.



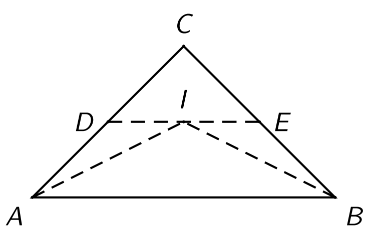
***EP* 2.43.** Considere um triângulo ABC retângulo em A, isósceles de cateto medindo a. Uma reta cruza o lado AC no ponto médio M, o lado AB no ponto E e no prolongamento da reta que passa por CB no ponto D. Se $\overline{BC} = \overline{BD}$, calcule a medida do segmento BE.

***EP* 2.44.** AB é um diâmetro de uma circunferência de centro O. Toma-se um ponto C deste círculo e prolonga-se AC de um segmento CD igual a AC. O segmento OD corta a circunferência em E e o segmento BC em F. Se $AB = a$ e $OD = b$, calcule EF.

***EP* 2.45.** Considere um paralelogramo $ABCD$ e M o ponto médio de AB. Determine $\overline{MP}$ sabendo que P é o ponto de interseção dos segmentos AC e DM e que $\overline{DP} = 16$.

***EP* 2.46.** Se P é o incentro do triângulo ABC e $B\hat{P}C = 125°$, determine $\hat{A}$.

***EP* 2.47.** Determine o perímetro do $\triangle CDE$ sabendo que $DE//AB$, $\overline{BC} = x$, $\overline{AC}$ mede y e que I é o incentro do triângulo ABC.



***EP* 2.48.** Sendo H o ortocentro do $\triangle ABC$ e $B\hat{H}C = 40°$. Determine $\hat{A}$.

***EP* 2.49.** H é o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e $B\hat{H}C = 40°$, determine os ângulos do triângulo.

***EP* 2.50.** Num triângulo ABC, G é o baricentro. Calcule x e y sabendo-se que $\overline{CG} = y + 2$, $\overline{GE} = x$, $\overline{AG} = y$ e $\overline{GD} = 7 - x$.

***EP* 2.51.** Em um triângulo ABC, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, $86°$ e $34°$. Determine o ângulo agudo formado pela mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$ e pela bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

***EP* 2.52.** Considere o $\triangle ABC$, de lados a, b, e c, e seu baricentro G. Traçam-se $\overline{GE}$ e $\overline{GF}$ paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule os lados do $\triangle GEF$.

***EP* 2.53.** Calcule o raio do círculo inscrito num triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a.

***EP* 2.54.** Num triângulo ABC retângulo em B, D é o ponto médio do lado AB, DE é paralelo a BC e G é o ponto de interseção dos segmentos CD e BE. Sendo $\overline{AC} = 54\ cm$, calcule $\overline{GB}$.

***EP* 2.55.** A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $20\ cm$ e um dos ângulos $20°$.

(a) Calcule a mediana relativa à hipotenusa.

(b) Qual a medida do ângulo formado por essa mediana e pela bissetriz do ângulo reto?

***EP* 2.56.** Considere um triângulo ABC. Une-se o ponto médio M do lado BC aos pés D e E das alturas BD e CE. Classifique o $\triangle MDE$.

***EP* 2.57.** Seja I o incentro de um $\triangle ABC$ e DIE um segmento paralelo ao lado BC. Sabendo que $\overline{AB} = 18$, $\overline{AC} = 23$ e $\overline{BC} = 20$, calcule o perímetro do $\triangle ADE$.

***EP* 2.58.** Num triângulo ABC, a reta r que passa pelo baricentro e o incentro é paralela ao lado BC do triângulo. Demonstrar que os lados do triângulo formam uma progressão aritmética.

Gabarito

EP 2.40. (a) $540°$, (b) $1.260°$, (c) $360\circ$. **EP** 2.41. 48. **EP** 2.42. $2\sqrt{3}$. **EP** 2.43. $\frac{a}{3}$. **EP** 2.44. $\frac{3a-2b}{6}$. **EP** 2.45. $\overline{MP} = 8$. **EP** 2.46. $70°$. **EP** 2.47. $x + y$. **EP** 2.48. $140°$. **EP** 2.49. $(20°, 20°, 140°)$. **EP** 2.50. $x = 4$ e $y = 6$. **EP** 2.51. $60°$. **EP** 2.52. $\frac{a}{3}$; $\frac{b}{3}$ e $\frac{c}{3}$. **EP** 2.53. $r = \frac{b+c-a}{2}$. **EP** 2.54. $18\ cm$. **EP** 2.55. $\overline{AM} = 10\ cm$ e $25°$. **EP** 2.56. $\triangle MDE$ é isósceles. **EP** 2.57. 41. **EP** 2.58. Demonstração.

Polígonos

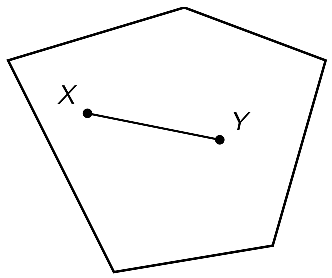
2.6 Polígonos Convexos

Uma seqüência de segmentos consecutivos define uma linha poligonal. Dois segmentos consecutivos possuem em comum um ponto chamado vértice. Cada segmento da linha poligonal será chamado de lado. Se a origem A_1 do primeiro segmento desta seqüência coincide com a extremidade A_n do n-ésimo segmento, temos uma poligonal fechada ou simplesmente um polígono. Caso contrário, a linha poligonal é aberta.

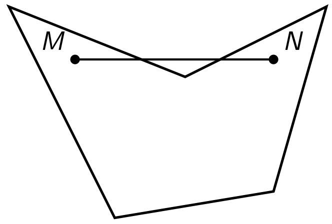
Um polígono diz-se entrelaçado se dois dos seus lados se interceptam. Esta interseção pode se dar de forma aleatória ou periódica.

Dividimos em duas classes os polígonos não entrelaçados. Um polígono pertence à classe dos convexos se quaisquer dois pontos X e Y de seu interior forma um segmento inteiramente contido no polígono. Caso contrário, o polígono é côncavo.

Atenção! Você conseguiu entender? Dê uma olhadinha nos desenhos abaixo e tudo ficará claro.



Polígono Convexo



Polígono Côncavo

2.6.1 Elementos de um Polígono Convexo

Considere um polígono $A_1A_2\ldots A_n$. Já definimos o que são vértices e lados de um polígono. As diagonais de um polígono são segmentos cujas extremidades são dois vértices não consecutivos do polígono. Os ângulos internos $\hat{a}_n$ são os ângulos formados por cada par de lados consecutivos. Os ângulos externos $\hat{A}_n$ são os suplementos destes. Portanto, $\hat{a}_n + \hat{A}_n = 180°$.

2.6.2 Nomenclatura de um Polígono Convexo

A tabela a seguir exibe a nomenclatura de um polígono em função do numero de lados n.

n	**Nomenclatura**
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono

n	**Nomenclatura**
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
13	tridecágono
14	tetradecágono

n	**Nomenclatura**
15	pentadecágono
16	hexadecágono
17	heptadecágono
18	octadecágono
19	eneadecágono
20	icoságono

2.6.3 Soma dos Ângulos Internos de Polígono Convexo Qualquer

Pode-se provar que um polígono convexo de n lados possui $(n-2)$ triângulos encaixados em seu interior. Como em cada triângulo a soma dos ângulos internos é $180°$, temos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dado por:

$$S_i = (n-2)\cdot 180° \qquad (2.2)$$

***ER* 2.59.** Calcule a soma dos ângulos internos de um eneágono convexo.

Solução: Como $n = 9$, $S_9 = (9-2)\cdot 180° = 1260°$.

2.6.4 Soma dos Ângulos Externos de um Polígono

2.34 Teorema. A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é $360°$.

Prova: Sabemos que $\hat{a}_i + \hat{A}_i = 180°$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Segue que

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{a}_i + \hat{A}_i) = n \cdot 180° \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i + \sum_{i=1}^{n}\hat{A}_i = n \cdot 180° \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\hat{A}_i = n \cdot 180° - \sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i.$$

Portanto,

$$S_e = n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° \Rightarrow S_e = 360°. \qquad \square$$

2.6.5 Polígonos Regulares

Dizemos que um polígono é regular quando possui todos os lados congruentes (eqüilátero) e todos os ângulos internos congruentes (eqüiângulo). Conseqüentemente, os ângulos externos também são congruentes.

Para um polígono regular de n lados temos:

$$\hat{a}_i = \frac{n-2}{n} \cdot 180° \qquad\qquad \hat{A}_i = \frac{360°}{n}.$$

***ER* 2.60.** Determine qual o ângulo interno de um dodecágono regular.

Solução: Temos um polígono regular com $n = 12$. Portanto,

$$\hat{a}_i = \frac{180°(12-2)}{12} = \frac{1800°}{12} = 150°.$$

***ER* 2.61.** Determine o número de polígonos cuja medida do ângulo interno é expressa por um valor inteiro.

Solução: Sabemos que ângulo interno e ângulo externo de um polígono regular são suplementares, ou seja, sua soma é igual a $180°$. Uma vez que o ângulo interno deve ser inteiro, devemos ter o ângulo externo também com medida inteira. Sendo assim, como $\hat{A}_i = \frac{360°}{n}$, n é divisor de $360°$. Como não existem polígonos de um ou dois lados, os possíveis valores de n pertencem ao conjunto

$$\{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360\}$$

que possui 22 elementos.

***ER* 2.62.** Determine o polígono regular cujo ângulo interno é três vezes maior que o externo.

Solução: $\hat{A}_i = 3x$ e $\hat{a}_i = x$. Mas, $\hat{A}_i + \hat{a}_i = 3x + x = 4x = 180°$. Portanto, $x = 45°$. Como $\hat{A}_i = \frac{360°}{n}$, $3 \cdot 45° = \frac{360°}{n}$. Logo, $n = 8$, ou seja, um octógono regular.

2.6.6 Número de Diagonais de um Polígono

Considere um polígono com n lados. De cada vértice podemos traçar um segmento para os outros $n-3$ vértices ($n-3$, porque as diagonais unem vértices não consecutivos). Portanto, no caso de um polígono com n lados, logo com n vértices, pode-se traçar $n(n-3)$ segmentos. Contudo, ao construir estes segmentos, aparecerão sempre segmentos repetidos, isto é, a diagonal que une um vértice A com um vértice B, é a mesma que une B com A, logo, o número de diagonais de um polígono com n lados é dado por $\frac{n(n-3)}{2}$.

***ER* 2.63.** Determine o polígono que possui 20 diagonais.

Solução: $20 = d = \dfrac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 40 = n(n-3) \Rightarrow n^2 - 3n - 40 = 0$. Esta equação possui raízes $n_1 = -5$ e $n = 8$. Como não existe polígono com quantidade de lados expresso por um número negativo, o polígono procurado é um octógono regular.

***ER* 2.64.** Determine o polígono cujo número de lados é igual ao dobro do número de diagonais.

Solução: $n = 2d \Rightarrow d = \dfrac{n}{2} \Rightarrow \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{n}{2} \Rightarrow n - 3 = 1 \Rightarrow n = 4$. Um quadrilátero.

***ER* 2.65.** Num polígono regular o ângulo interno excede o externo em $60°$. Calcule o número de diagonais distintas do polígono.

Solução: Temos que

$$\begin{array}{rcl} \hat{a}_i + \hat{A}_i & = & 180° \\ \hat{a}_i - \hat{A}_i & = & 60° \end{array}.$$

Somando-se estas duas equações, temos: $2 \cdot \hat{a}_i = 280°$. Portanto, $\hat{a}_i = 120°$. Segue que $\hat{A}_i = 60°$. Desta forma, $n = \dfrac{360°}{60°} = 6$ e $d = \dfrac{6(6-3)}{2} = 9$.

***ER* 2.66.** Se aumentarmos em 3 o número de lados de um polígono, o número de diagonais aumenta 21. Determine o polígono.

Solução: Temos que

$$\left.\begin{array}{rcl} d & = & \dfrac{n(n-3)}{2} \\ \\ d + 21 & = & \dfrac{(n+3)((n+3)-3)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{n(n-3)}{2} + 21 = \dfrac{(n+3)n}{2}$$

$$\Rightarrow n(n-3) + 42 = (n+3)n \Rightarrow 42 = (n+3)n - n(n-3) \Rightarrow 42 = n(n+3-n+3) = 6n \Rightarrow n = 7$$

O polígono é, portanto, um heptágono.

2.6.7 Exercícios

***EP* 2.67.** Qual é polígono convexo em que a soma dos ângulos internos é $1080°$?

***EP* 2.68.** Determine qual a medida inteira mais próxima de cada ângulo externo de um heptágono regular.

***EP* 2.69.** Qual o polígono regular cujo ângulo interno mede o triplo do ângulo externo?

***EP* 2.70.** $ABCDE$ é um pentágono regular. Determine a medida, em graus, do ângulo $A\hat{C}D$.

***EP* 2.71.** Determine o polígono regular convexo em que o $n°$ de lados é igual ao número de diagonais.

***EP* 2.72.** Considere as afirmações sobre polígonos convexos. Determine a afirmação falsa.

I. Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II. Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III. Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

***EP* 2.73.** Dois ângulos internos de um polígono convexo medem $130°$ cada um e os demais ângulos internos medem $128°$ cada um. Determine o número de lados do polígono.

***EP* 2.74.** A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é $2.160°$. Calcule o número de diagonais deste polígono que não passa pelo centro da circunferência que o circunscreve.

***EP* 2.75.** O comprimento da diagonal do pentágono regular de lado medido 1 unidade é igual à raiz positiva de:

(a) $x^2 + x - 2 = 0$

(b) $x^2 - x - 2 = 0$

(c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(d) $x^2 + x - 1 = 0$

(e) $x^2 - x - 1 = 0$

***EP* 2.76.** Determine o ângulo interno de um polígono regular em que o número de diagonais excede em 3 unidades o número de lados.

***EP* 2.77.** A razão entre o número de diagonais de dois polígonos é $\frac{5}{26}$. Um deles possui o dobro do número de lados do outro. Determine os polígonos.

***EP* 2.78.** Um polígono possui a partir de um de seus vértices, tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Determine o polígono e o total de suas diagonais.

***EP* 2.79.** Determine o total de polígonos cujo número de lados n é expresso por dois algarismos iguais e que seu número d de diagonais é tal que $d > 26n$.

***EP* 2.80.** Aumentando-se o número de lados de um polígono de em 3 unidades, seu número de suas diagonais aumenta de 21. Determine o número de diagonais desse polígono.

***EP* 2.81.** O número de lados de dois polígonos é dado por $(x - 1)$ e $(x + 1)$. Sabendo-se que o número total de diagonais é 55, qual o número que expressa a diferença entre elas?

***EP* 2.82.** Num polígono, a soma dos ângulos internos adicionada à soma dos ângulos externos é igual a $1440°$. Determine o número de diagonais do polígono.

***EP* 2.83.** Em um polígono regular $ABCD\ldots$, as mediatrizes dos lados AB e BC formam um ângulo de $9°$. Determine o número de lados do polígono.

***EP* 2.84.** $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são dois lados consecutivos de um polígono regular. Se $A\hat{B}C = 3 \cdot A\hat{C}B$ achar o número de lados do polígono.

***EP* 2.85.** AB, BC, CD e DE são 4 lados consecutivos de um icoságono regular. Os prolongamentos AB e DE cortam-se em I. Calcule $B\hat{I}D$.

***EP* 2.86.** A soma dos ângulos externos de um pentágono e de 4 dos seus ângulos internos é igual a $850°$. Calcule o quinto ângulo do pentágono.

***EP* 2.87.** A razão entre o número de lados de dois polígonos é $\frac{2}{3}$ e a razão entre o número de diagonais é $\frac{1}{3}$. Determine os polígonos.

***EP* 2.88.** Determine o número de diagonais de um polígono convexo sabendo que de um dos seus vértices partem 12 diagonais.

***EP* 2.89.** Determine o ângulo interno de um polígono regular $ABCD$..., sabendo que as bissetrizes $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo que vale $\frac{2}{9}$ do seu ângulo interno.

***EP* 2.90.** Três polígonos possuem o numero de lados expressos por números inteiros consecutivos. Sabendo que o número total de diagonais dos três polígonos é igual a 43, determine o polígono com menor número de lados.

***EP* 2.91.** A medida sexagésima do menor ângulo de um polígono convexo é $139°$ e as medidas sexagésimas dos outros ângulos formam com a do primeiro, tomadas na ordem crescente, uma progressão aritmética cuja razão é $2°$. Calcular o número de lados do polígono.

***EP* 2.92.** Demonstrar que um polígono convexo não pode ter mais de três ângulos internos agudos.

***EP* 2.93.** Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes de um polígono.

***EP* 2.94.** Três polígonos regulares com número de lados m, n e p "preenchem o plano" num mesmo vértice. Demonstre que $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$ é constante.

Gabarito

EP 2.67. Octógono. **EP** 2.68. 51°. **EP** 2.69. Octógono **EP** 2.70. 36° **EP** 2.71. Pentágono. **EP** 2.72. II. **EP** 2.73. 7. **EP** 2.74. 70 **EP** 2.75. *e*. **EP** 2.76. 120°. **EP** 2.77. Octógono; hexadecágono. **EP** 2.78. Dodecágono; 54 diagonais. **EP** 2.79. 4 **EP** 2.80. 14. **EP** 2.81. 15 **EP** 2.82. 20. **EP** 2.83. 40. **EP** 2.84. 5 (pentágono). **EP** 2.85. 126°. **EP** 2.86. 50°. **EP** 2.87. $n_1 = 6$ e $n_2 = 9$. **EP** 2.88. 90. **EP** 2.89. 162. **EP** 2.90. Polígonos: 6, 7 e 8; o menor polígono é o hexágono. **EP** 2.91. 12. **EP** 2.93. $x = \frac{360°}{n}$.

Quadriláteros

2.35 Definição. *Quadrilátero é um polígono com quatro lados.*

Importante!

Por se tratar de um polígono com quatro lados, um quadrilátero possui duas diagonais e a soma dos ângulos internos e a dos externos são iguais a $360°$.

Podemos dividir os quadriláteros em dois grupos: os côncavos e os convexos. Neste capítulo estaremos mais interessados no estudo dos quadriláteros convexos notáveis.

Os quadriláteros planos convexos notáveis são:

1. O Trapézio: possui dois lados paralelos, os quais são chamados de bases. Quando um trapézio possui apenas dois lados paralelos podemos classificá-los em
   (a) Escaleno: todos os lados possuem medidas distintas;
   (b) Retângulo (ou bi-retângulo): um dos lados é também altura do trapézio (possui dois ângulos retos);
   (c) Isósceles: os lados não paralelos possuem mesma medida.
2. Paralelogramo: possui os lados opostos paralelos;
3. Retângulo: possui os quatro ângulos congruentes;
4. Losango: possui os quatro lados congruentes;
5. Quadrado: possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes.

2.7 Propriedades dos Quadriláteros

As propriedades a seguir são simples de demonstrar, visto que as provas são conseqüências de casos de congruência de triângulos e constituem um bom exercício para o leitor.

Propriedades dos Trapézios

P1. Os ângulos consecutivos cujo lado comum é um dos lados não paralelo de um trapézio são suplementares. Uma conseqüência imediata disto é que:

P2. As bissetrizes dos ângulos consecutivos cujo lado comum é um dos lados não paralelo de um trapézio são perpendiculares.

P3. Num trapézio isósceles, as diagonais e os ângulos da base são congruentes.

P4. O comprimento da base média de um trapézio (segmento que possui extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos) é paralela à base e é a média aritmética dos comprimentos das bases.

Propriedades dos Paralelogramos

Em um paralelogramo temos que

P5. Os ângulos opostos são congruentes. Além disso, se os ângulos opostos de um quadrilátero convexo são congruentes, então ele é um paralelogramo. Uma conseqüência desta propriedade é que todo retângulo é paralelogramo.

P6. Lados opostos são congruentes. Além disso, se os lados opostos de um quadrilátero convexo são congruentes, então ele é um paralelogramo.

P7. Suas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios. Além disso, se as diagonais de um quadrilátero convexo se interceptam nos respectivos pontos médios, então ele é um paralelogramo.

Propriedades dos Retângulos

Por se tratar de um paralelogramo, todas as propriedades dos paralelogramos são também válidas para os retângulos. Além destas, temos que

P8. Suas diagonais são congruentes. Além disso, todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Propriedades dos Losangos e dos Quadrados

Por se tratar de um paralelogramo, todas as propriedades dos paralelogramos são também válidas para os losangos. Além destas, temos que

P9. Suas diagonais são perpendiculares. Além disso, todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Por se tratar de um losango (ver definição) e de um retângulo, o quadrado possui todas as propriedades já vistas anteriormente.

***Nota* 11.** Se um quadrilátero convexo possui diagonais que

- ⋆ se cortam ao meio, então é um paralelogramo;
- ⋆ se cortam ao meio e são congruentes, então é um retângulo;
- ⋆ se cortam ao meio e são perpendiculares, então é um losango;
- ⋆ se cortam ao meio, são congruentes e perpendiculares, então é um quadrado.

2.7.1 Exercícios

***EP* 2.95.** Marque V, se verdadeiro, ou F se falso.

1. (   ) Todo paralelogramo é um retângulo.
2. (   ) Todo quadrado é retângulo.
3. (   ) Todo paralelogramo é losango.
4. (   ) Todo quadrado é losango.
5. (   ) Todo retângulo que tem dois lados congruentes é quadrado.
6. (   ) Todo paralelogramo que tem dois lados adjacentes congruentes é losango.
7. (   ) Se dois ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
8. (   ) Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
9. (   ) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
10. (   ) As diagonais de um losango são congruentes.
11. (   ) As diagonais de um retângulo são perpendiculares.
12. (   ) As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos.
13. (   ) As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.
14. (   ) As diagonais de um quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares.
15. (   ) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes de seus ângulos, então ele é um losango.
16. (   ) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes e congruentes, então ele é um quadrado.

***EP* 2.96.** A razão entre dois lados de um paralelogramo é $2/3$. se o perímetro desse paralelogramo é $150\ m$, determine a medida dos lados.

***EP* 2.97.** Num paralelogramo, dois ângulos consecutivos medem $x + 50$ e $2x + 70$. Determine o maior dos ângulos deste paralelogramo.

***EP* 2.98.** Sabendo que um dos ângulos externos de um paralelogramo é $130°$, determine os ângulos internos.

EP **2.99.** As diagonais de um retângulo $ABCD$ se cruzam formando um ângulo de $50°$. Determine os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{B}D$.

EP **2.100.** Os ângulos de um losango $ABCD$ medem α e 2α. Sabendo que sua diagonal menor mede $4\ cm$, calcule o seu lado.

EP **2.101.** $ABCD$ é um paralelogramo, M é o ponto médio do lado CD e T é o ponto de intersecção de AM com BD. Calcule o valor da razão DT/BD.

EP **2.102.** Determine a afirmativa falsa.

I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.

II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então esse paralelogramo é um losango.

EP **2.103.** Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que possui dois ângulos retos, ângulo agudo α e um ângulo obtuso β. Suponha que, em um tal trapézio, a medida de β seja igual a cinco vezes a medida de α.

(a) Calcule a medida de α, em graus.

(b) Mostre que o ângulo formado pelas bissetrizes de α e β é reto.

EP **2.104.** Num losango, a medida do ângulo obtuso é igual ao triplo da medida do ângulo agudo. Calcule as medidas dos ângulos desse losango.

EP **2.105.** A medida de cada ângulo obtuso de um losango é expressa por $2x + 5°$ e a medida de cada ângulo agudo por $x + 40°$. Determine as medidas dos 4 ângulos internos desse losango.

ER **2.106.** *A base média de um trapézio vale $20\ cm$ e a base maior é $\frac{3}{2}$ da base menor. Determine as bases.*

Solução: Sabemos pela propriedade $P4$ que o comprimento da base média de um trapézio é a média aritmética dos comprimentos das bases, assim, denotanto as bases maior e menor, respectivamente, por B e b, temos:

$$20 = \frac{B+b}{2} \quad \Rightarrow \quad B + b = 40$$

Por outro lado, a base maior corresponde a $\frac{3}{2}$ da base menor. Isto é,

$$B = \frac{3}{2}b.$$

Daí, destas duas equações temos

$$\frac{3}{2}b + b = 40 \quad \Rightarrow \quad b = 16.$$

Consequentemente, $B = \frac{3}{2} \cdot 12 = 24$.

EP **2.107.** Num trapézio retângulo em que o ângulo agudo mede $45°$, demonstre que a altura é igual a diferença entre as bases.

EP **2.108.** Em um trapézio retângulo, a bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz de um ângulo agudo do trapézio um ângulo de $110°$. Determine o maior ângulo do trapézio.

***EP* 2.109.** No trapézio $ABCD$ $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$ e $\overline{BD} = \overline{BA}$. Calcule o ângulo $\hat{A}$.

***EP* 2.110.** Um trapézio $ABCD$ de bases AB e CD é tal que $\hat{A} = \hat{B} = 60°$, $\overline{AD} = 8\ cm$ e $\overline{DC} = 7\ cm$. Determine a base média do trapézio.

***EP* 2.111.** Num paralelogramo de perímetro $30\ cm$, $\hat{A} = 120°$, a bissetriz do ângulo $\hat{D}$ passa pelo ponto médio M do lado AB. Calcule os lados do paralelogramo e os ângulos do $\triangle CMD$.

***EP* 2.112.** Calcule o perímetro de um trapézio isósceles cujas bases medem $12\ cm$ e $8\ cm$, sabendo que as diagonais são bissetrizes dos ângulos adjacentes à base maior.

***EP* 2.113.** Sejam $ABCD$ um quadrado, ABP um triângulo eqüilátero exterior. Calcule o ângulo $D\hat{P}Q$.

***EP* 2.114.** Um trapézio $ABCD$ de base maior $\overline{AB} = 10\ cm$ é tal que $\hat{A} = \hat{B} = 60°$ sendo a diagonal AC perpendicular ao lado CB. Determine o perímetro do trapézio.

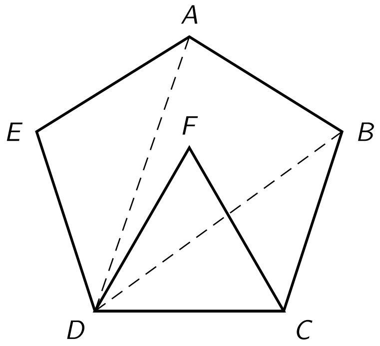
***EP* 2.115.** $ABCD$ é um quadrado e CMN é uma reta que intercepta a diagonal BD em M e o lado AB em N. Se $C\hat{M}D = 80°$, calcule $A\hat{N}C$.

***EP* 2.116.** $ABCD$ é um losango no qual $\hat{B} = 108°$ e $CAPQ$ é um outro losango cujo vértice P está no prolongamento de AB. Achar os ângulos formados pelos segmentos AQ e BC.

***EP* 2.117.** $ABCD$ é um retângulo cujas diagonais se cortam em O e AOM é um triângulo eqüilátero constituído no semiplano dos determinados por $\overline{AC}$ que contém B. Se $A\hat{C}D = 25°$, calcule os ângulos do $\triangle ABM$.

***EP* 2.118.** $ABCDE$ é um pentágono regular e $EDCM$ é um paralelogramo interno ao pentágono. Calcular os ângulos do triângulo AME.

***EP* 2.119.** Na figura, $ABCDE$ é um pentágono regular, DCF é um triângulo eqüilátero. Calcule os ângulos $B\hat{F}C$, $A\hat{D}F$ e o menor dos ângulos formado pelos segmentos BD e CF.



***EP* 2.120.** Considere um trapézio qualquer de bases a e b $(b > a)$. Determine os segmentos formados pelas diagonais na base média do trapézio.

***EP* 2.121.** Considere as seguintes proposições:

I. Todo quadrado é um losango.

II. Todo quadrado é um retângulo.

III. Todo retângulo é um paralelogramo.

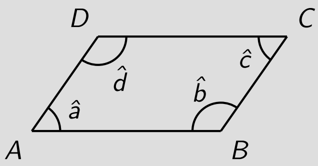
IV. Todo triângulo eqüilátero é isósceles.

Pode-se afirmar que a quantidade de afirmações verdadeiras é

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) Todas são falsas.

***ER* 2.122.** A diferença entre a medida de dois ângulos consecutivos de paralelogramo é $40°$. Calcular a medida dos ângulos internos desse paralelogramo.

Solução: Considere o paralelogramo $ABCD$ representado ao lado. Pela propriedade $P5$ sabemos que $\hat{a} = \hat{c}$ e $\hat{b} = \hat{d}$. Além disso, a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é $360°$. Em particular,



$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360° \Rightarrow \hat{a} + \hat{b} + \hat{a} + \hat{b} = 360° \Rightarrow 2\hat{a} + 2\hat{b} = 360° \Rightarrow \hat{a} + \hat{b} = 180°.$$

Por outro lado, por hipótese temos $\hat{b} - \hat{a} = 40°$. Assim, resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{b} &= 180° \\ -\hat{a} + \hat{b} &= 40° \end{cases}$$

temos $\hat{b} = 110°$ e $\hat{a} = 70°$. Logo $\hat{a} = \hat{c} = 70°$ e $\hat{b} = \hat{d} = 110°$.

***EP* 2.123.** No trapézio $ABCD$ de bases AB e CD ($\overline{AB} > \overline{CD}$) e de lados não paralelos AD e BC, a bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$ intercepta o prolongamento do lado DC no ponto P de maneira que $2P\hat{B}C + A\hat{B}C = 180°$. Se a base $\overline{AD} = 37$ e $\overline{BC} = 26$, calcule $\overline{CD}$.

Gabarito

EP 2.95.

1. (V)	2. (V)	3. (F)	4. (V)	5. (F)	6. (V)	7. (F)	8. (F)
9. (F)	10. (F)	11. (F)	12. (F)	13. (F)	14. (V)	15. (V)	16. (V)

EP 2.96. 30 m; 45 m. **EP** 2.97. $110°$. **EP** 2.98. $50°$ e $y = 130°$. **EP** 2.99. $B\hat{A}C = 25°$ e $C\hat{B}D = 65°$. **EP** 2.100. 4 **EP** 2.101. 1/3 **EP** 2.102. III. **EP** 2.103. $\beta = 5\alpha$ e $\alpha + \beta = 180° \therefore \alpha + 5\alpha = 180°$, $\alpha = 30°$ e $\beta = 150°$. Seja x o ângulo formado pelas bissetrizes de α e β. Logo $x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° \therefore x + \frac{\alpha + \beta}{2} = 180° x + 90° = 180° \therefore x = 90°$. **EP** 2.104. $45°$ e $135°$. **EP** 2.105. $85°$ e $95°$ **EP** 2.107. $ABDE$ é um retângulo $\Rightarrow \overline{DE} = b\ \overline{CE} = a - b$ e o $\triangle BEC$ é isósceles $h = \overline{CE} \therefore h = a - b$. **EP** 2.108. $130°$. **EP** 2.109. $72°$. **EP** 2.110. 11 cm. **EP** 2.111. $\triangle AMD$ é isósceles, $\triangle BMC$ é eqüilátero e $\triangle CMD$ é retângulo em M. Fazendo-se $a = \overline{AM}$, $\overline{AD} + \overline{BC} + \overline{AB} + \overline{DC} = 6a = 30\ cm \therefore a = 5\ cm$. $\overline{AD} = \overline{BC} = a = 5\ cm$ e $\overline{AB} = \overline{DC} = 2a = 10\ cm$. **EP** 2.112. 36 cm. **EP** 2.113. $180°$. **EP** 2.114. 25 cm. **EP** 2.115. $125°$. **EP** 2.116. AC é bissetriz do $B\hat{A}D$ (losango $ABCD$). AQ é bissetriz do $B\hat{A}C$ (losango $CAPQ$) $180° + 4a = 180°\ 4a = 72\ a = 18°$, $x = 108° + a\ x = 108° + 18° = 126°$ e o suplemento $54°$. **EP** 2.117. $35°$, $115°$ e $30°$. **EP** 2.118. $36°$, $72°$ e $72°$. **EP** 2.119. $B\hat{F}C = 66°$; $A\hat{D}F = 12°$ e $84°$. **EP** 2.120. $\overline{MP}$ é a base média do $\triangle ABD \Rightarrow MP = \frac{a}{2}$ $\overline{QN}$ é base média do $\triangle ABC \Rightarrow QN = \frac{a}{2}$ $\overline{PQ}$ é o chamado segmento de Euler e $MP + PA + QN = \frac{a+B}{2} \frac{a}{2} + PQ + \frac{a+b}{2} \Rightarrow PQ = \frac{b-a}{2}$ **EP** 2.121. (b). **EP** 2.123. 11.

bloco temático 2 Métrica

tema 3 Relações Métricas em Triângulos e Circunferência

Relações Métricas num Triângulo

3.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Considere um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto no vértice A. Trace a altura AD do vértice A ao lado BC. Adotemos a seguinte notação:

Hipotenusa : $a = \overline{BC}$

Catetos : $b = \overline{AC}$; $c = \overline{AB}$

Projeções sobre a hipotenusa : $m = \overline{BD}$; $n = \overline{CD}$

Altura relativa à hipotenusa : $h = \overline{AD}$

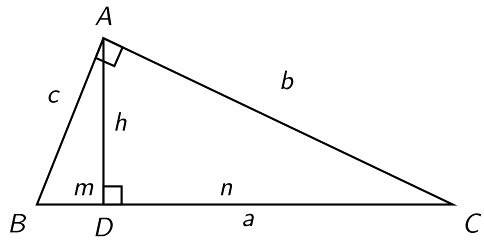


Figura 3.2: Triângulo Retângulo em $\hat{A}$

Como AD é perpendicular a BC, então os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ e $\hat{B} + B\hat{A}D = 90°$, então $B\hat{A}D \cong \hat{C}$. Como $D\hat{A}C + \hat{C} = 90°$, então $D\hat{A}C = \hat{B}$.

Os triângulos ADB e CDA são, portanto, semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si. Logo,

$$\left.\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DBA &\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \\ \triangle ABC \sim \triangle DAC &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \\ \triangle ADC \sim \triangle DBA &\Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} c^2 &= am \\ b^2 &= an \\ h^2 &= mn \\ ah &= bc \\ ch &= bm \\ bh &= cn \end{aligned}\right.$$

Assim, provamos as seguintes proposições:

3.1 Proposição. Cada cateto é a média geométrica entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa. Isto é, $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$

3.2 Proposição. A altura relativa à hipotenusa é a média geométrica dos segmentos determinados pelas projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Isto é, $h^2 = m \cdot n$.

3.3 Proposição. O produto da hipotenusa pela altura do triângulo relativa a ela é igual ao produto dos catetos. Isto é, $acdoth = b \cdot c$.

3.4 Proposição. O produto de um cateto pela altura do triângulo relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa. Isto é, $b \cdot h = c \cdot n$ e $c \cdot h = b \cdot m$.

> ***Nota* 12.** O teorema a seguir é um dos mais conhecidos da Matemática. Sua importância é incontestável devido a sua grande utilização nas diversas áreas. Ele é conhecido como "teorema de Pitágoras" em homenagem a um grande geômetra da Grécia antiga.

3.5 Teorema. [Pitágoras] Se um triângulo é retângulo, então o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

> **Prova:** Considere um triângulo retângulo em A. De acordo com a proposição 3.1, $b^2 = na$ e $c^2 = am$. Somando-se estas equações, temos que $b^2 + c^2 = an + am = a(n + m)$. Como $n + m = a$, segue que $b^2 + c^2 = a^2$. □

Pratique! A inversa do teorema de Pitágoras também é verdade. Prove como exercício. Você pode ainda, consultar o tema 1 do AVA (proposições 47 e 48) e ver outra versão para a demonstração deste teorema, exibida por Euclides.

***ER* 3.1.** Num triângulo retângulo, sabe-se que seus lados medem x, $x - 7$ e $x + 1$. Calcule x.

Solução: Como o triângulo é retângulo e o maior dos lados é $x+1$, pelo teorema de Pitágoras temos que:

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 7)^2$$

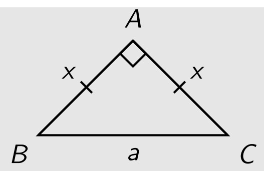
Desenvolvendo-se os termos, temos

$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

cuja solução é $x = 4$ ou $x = 12$. A solução $x = 4$ não é conveniente, pois, não podemos ter a medida negativa para o lado de um triângulo. Logo, $x = 12$ é a única solução para o problema.

***ER* 3.2.** O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é $4+2\sqrt{2}$. Calcule a altura relativa à hipotenusa.

Solução: Considere o triângulo em questão com vértices em A, B e C. Portanto, $b = c = x$ (isósceles) e $a^2 = b^2+c^2$, ou seja, $a^2 = x^2+x^2 \Rightarrow a = x\sqrt{2}$. Segue que $a+b+c = x+x+x\sqrt{2} = 4+2\sqrt{2}$, ou seja, $x = 2$. Sendo h o comprimento da altura relativa à hipotenusa, temos que $h \cdot x\sqrt{2} = x \cdot x$, ou seja, $h = \sqrt{2}$.

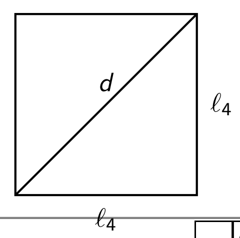


3.1.1 Aplicações do Teorema de Pitágoras

3.6 Proposição. O comprimento d da diagonal de um quadrado de lado medindo ℓ_4 é dado por:

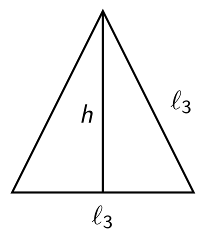
$$d = \ell_4\sqrt{2}.$$

Prova: Por Pitágoras, $\ell_4^2 + \ell_4^2 = d^2$, ou seja, $d^2 = 2\ell_4^2$. Assim, $d = \ell_4\sqrt{2}$.



3.7 Proposição. O comprimento h da altura de um triângulo equilátero de lado medindo ℓ_3 é dado por:

$$h = \frac{\ell_3\sqrt{3}}{2}.$$



A proposição 3.7 é também uma aplicação direta do teorema de Pitágoras e deve ser provada pelo leitor como exercício. Lembre-se de que a altura relativa a um dos lados o divide ao meio.

Nota 13. *Chamamos de triângulos Pitagóricos aqueles que satisfazem o Teorema de Pitágoras e são formados por lados cujo comprimento é um número inteiro. Considere x e y dois números inteiros com $x > y$. Se fizermos os catetos $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$, chegaremos a conclusão que $a = x^2 + y^2$. Observe que as ternas da tabela ao lado são Pitagóricas e seus múltiplos também o são. Por exemplo, $(3, 4, 5)$ e $(6, 8, 10)$.*

x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
		$\vdots$		

3.1.2 Exercícios

***ER* 3.3.** Os catetos b e c de um triângulo retângulo ABC medem 6 e 8, respectivamente. Determine a medida da menor altura desse triângulo.

Solução: Pelo teorema de Pitágoras a hipotenusa do triângulo ABC é igual a: $a^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Logo, $a = 10\ cm$. por outro lado, $a \cdot h = b \cdot c$, onde h é a altura relativa à hipotenusa. Daí, $10 \cdot h = 6 \cdot 8$. Segue que $h = 4,8\ cm$.

***EP* 3.4.** Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo em que os catetos medem um centímetro cada?

***EP* 3.5.** Deduza as fórmulas da diagonal do quadrado e da altura de um triângulo eqüilátero.

***EP* 3.6.** Quanto mede a altura de um triângulo eqüilátero cujos lados medem $1,0\ cm$ cada?

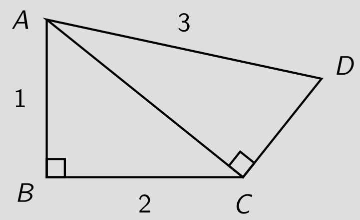
***EP* 3.7.** Uma caixa mede $12\ cm$ de comprimento, $4\ cm$ de largura e $3\ cm$ de altura. Quanto mede as diagonais de cada uma das faces da caixa?

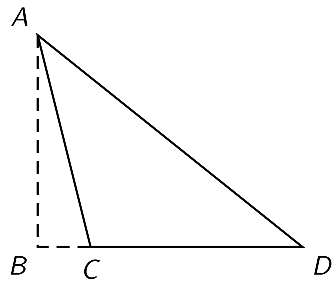
***EP* 3.8.** A área de um triângulo retângulo é $12\ dm^2$. Se um dos catetos é $2/3$ do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

***EP* 3.9.** As rodas de uma bicicleta, de modelo antigo, têm diâmetros de $110\ cm$ e de $30\ cm$ e seus centros distam $202\ cm$. Determine a distância entre os pontos de contato das rodas com o chão.

***ER* 3.10.** Considere os triângulos ABC, retângulo em B, e ACD, retângulo em C. Sabendo-se que $\overline{AB} = 1\ cm$, $\overline{BC} = 2\ cm$ e $\overline{AD} = 3\ cm$, determine $\overline{CD}$.

Solução: Seja $x = \overline{AC}$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao $\triangle ABC$, temos $x^2 = 1^2 + 2^2$. Segue que, $x = \sqrt{5}$. Considere $\overline{CD} = y$. Como ACD é um triângulo retângulo em C, $\overline{AC} = \sqrt{5}$ e $\overline{AD} = 3$, temos $3^2 = (\sqrt{5})^2 + y^2$. Assim, $y = 2$. Portanto, $\overline{CD} = 2\ cm$.





***EP* 3.11.** Na figura temos que $\overline{BC} = 2$, $\overline{AC} = 10$, $\overline{CD} = 8$ e um ângulo reto em B. Determine o valor de $\overline{AD}$.

***EP* 3.12.** A folha de papel retangular $ABCD$ é dobrada de tal forma que o vértice A se torna um ponto do segmento BC. Sabendo-se que $\overline{AD} = 20$ e $\overline{AB} = 16$, determine $\overline{DP}$.

***EP* 3.13.** As medidas dos três lados de um triângulo retângulo são números em progressão aritmética. Qual o valor da área do triângulo, sabendo-se que o menor lado mede 6?

***EP* 3.14.** Num triângulo ABC, retângulo em A, D é o pé da altura relativa ao lado BC. No triângulo ADB, E é o pé da altura relativa ao lado AB. Se a medida de CE é 80, determine o comprimento de BC.

***EP* 3.15.** Em um triângulo retângulo OAB, retângulo em O, com $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$ são dados os pontos P em OA e Q em OB de tal maneira que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = x$. Nessas condições, o valor de x é:

***EP* 3.16.** Considere um trapézio $ABCD$ tal que os segmentos de reta AB e CD são perpendiculares ao segmento de reta BC. Se $\overline{AB} = 19\ cm$, $\overline{BC} = 12\ cm$ e $\overline{CD} = 14\ cm$, determine a medida, em centímetros, do segmento de reta AD.

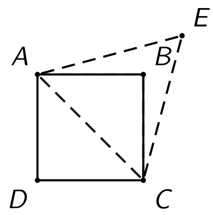


Figura 3.17

***EP* 3.17.** Na figura 3.17, o triângulo AEC é eqüilátero e $ABCD$ é um quadrado de lado medindo $2\ cm$. Calcule $\overline{BE}$.

***EP* 3.18.** Na figura 3.18, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BD} = 9$ e $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CE} + 2$. Determine o perímetro do triângulo ABC.

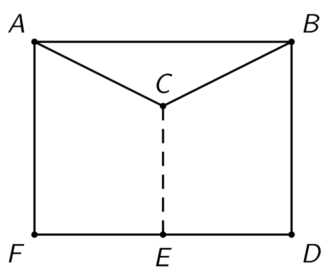


Figura 3.18

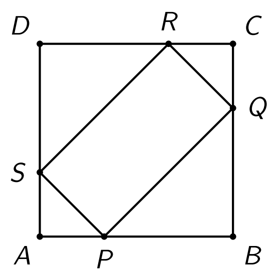


Figura 3.19

***EP* 3.19.** Na figura 3.19, $ABCD$ representa um quadrado de lado 11 e $\overline{AP} = \overline{AS} = \overline{CR} = \overline{CQ}$. Determine o perímetro do quadrilátero $PQRS$.

***EP* 3.20.** Uma folha quadrada de papel $ABCD$ de lado unitário é dobrada de modo que o vértice C coincide com o ponto M médio de AB. Determine o comprimento $\overline{BP}$.

***EP* 3.21.** Os três lados de um triângulo retângulo, estão em progressão geométrica. Determinar a razão da progressão.

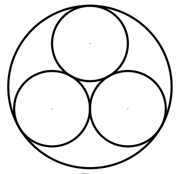
***EP* 3.22.** As raízes da equação $2x^2 + 2(k-3)x - 3k(5k-6) = 0$ representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Determine o parâmetro k de modo que a hipotenusa do triângulo seja igual a 5.

***EP* 3.23.** A diagonal AC de um trapézio $ABCD$, de bases menor AB e maior CD, é perpendicular ao lado AD de comprimento b. Sendo $\overline{CD} = a$, calcule a altura do trapézio.

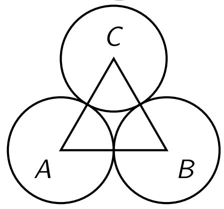
***EP* 3.24.** $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede $15\ m$ e P é um ponto externo a este quadrado que dista $9\ m$ do vértice C e $12\ m$ do vértice B. A reta que contém o segmento AP intercepta o lado BC em E. Calcule o comprimento do segmento AE.

***EP* 3.25.** Num triângulo retângulo ABC, a razão entre a altura e a mediana relativas à hipotenusa BC é igual a $\frac{40}{41}$. Calcule a razão entre os catetos AB e AC.

***EP* 3.26.** Três canos de forma cilíndrica e de mesmo raio r, dispostos como indica a figura adiante, devem ser colocados dentro de outro cano cilíndrico de raio R, de modo a ficarem presos sem folga. Expresse o valor de R em termos de r para que isso seja possível.



***EP* 3.27.** Na figura ao lado, o triângulo ABC é eqüilátero com lados de comprimento $2\ cm$. Os três círculos C_1, C_2 e C_3 têm raios de mesmo comprimento e seus centros são vértices A, B e C do triângulo, respectivamente. Seja $r > 0$ o raio do círculo C_4 interior ao triângulo ABC e simultaneamente tangente aos círculos C_1, C_2 e C_3. Calcule $9(1 + r)^2$.



Gabarito

EP 3.8. $2\sqrt{13}\ dm$. **EP** 3.9. $198\ cm$. **EP** 3.11. 14. **EP** 3.12. $10\sqrt{5}$ **EP** 3.13. 24. **EP** 3.14. 10.**EP** 3.15. $a + b - \sqrt{2ab}$. **EP** 3.16. $13\ cm$. **EP** 3.17. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})\ cm$. **EP** 3.18. $100/7$ **EP** 3.19. $22\sqrt{2}$. **EP** 3.20. $0,375$. **EP** 3.21. $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **EP** 3.22. $k = 2$ ou $k = -0,5$. **EP** 3.23. $\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$. **EP** 3.24. $AE = 16,342\ m$. **EP** 3.25. $\frac{4}{5}$. **EP** 3.26. r. **EP** 3.27. 12.

3.2 Relações Trigonométricas num Triângulo Retângulo

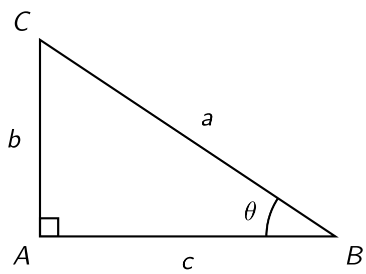
A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: ‘tri’ = três, ‘gonos’ = ângulos e ‘metron’ = medir. Daí, o seu significado: medida dos triângulos. Assim, a trigonometria é a parte da matemática que tem como objetivo o cálculo das medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos).

História . . .

. . . por volta de 140 a.C. o astrônomo grego Hiparco que é considerado o pai da Astronomia, foi quem pela primeira vez empregou relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Em 125 a.C., Ptolomeu produz o mais antigo documento que trata da trigonometria: o *Almagesto*, baseado nos trabalhos de Hiparco. No século XV, Purback procurou restabelecer a obra de Ptolomeu, construindo a primeira tábua trigonométrica. O primeiro tratado de trigonometria, feito de maneira sistemática, é chamado de Triangulis ou tratado dos triângulos e escrito pelo matemático alemão Johann Muller (discípulo de Purback).

Hoje em dia a trigonometria não se limita a estudar somente os triângulos. Encontramos aplicações da trigonometria em Eletricidade, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia Civil, Topografia, Astronomia Matemática, bem como para um grande elenco de disciplinas mais recentes, como a Geodésia, a Navegação Oceânica, a Navegação Aérea, a Mecânica de Satélites Artificiais, a Transmissão de Rádio de Grande Alcance, o Cálculo de Trajetórias de Mísseis Intercontinentais, o Cálculo do Aquecimento Solar em Arquitetura, etc.

3.8 Definição. Considere um triângulo ABC retângulo em A. A razão entre o cateto adjacente a um determinado ângulo e a hipotenusa é chamada cosseno do ângulo; entre o cateto oposto a um determinado ângulo e a hipotenusa é chamada seno do ângulo e; entre o cateto oposto e o adjacente, ambos a um determinado ângulo, é chamada tangente do ângulo. Assim:



$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

Como conseqüência destas definições temos que, se é conhecido um dos lados de um triângulo retângulo, é possível calcular as medidas dos seus outros dois lados, supondo-se que conheçamos os valores do seno, cosseno e tangente de um dos ângulos do triângulo retângulo.

Atualmente, uma máquina de calcular (ou um computador) razoavelmente simples, possui circuitos que permitem calcular estes valores com uma boa aproximação. Pode-se, no entanto, utilizar uma tabela que é encontrada facilmente em qualquer compêndio sobre trigonometria. Uma tabela que é bem fácil de memorizar se encontra ao lado

θ	30°	45°	60°
sen θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

***ER* 3.28.** Calcule o valor de x e de y na figura ao lado.

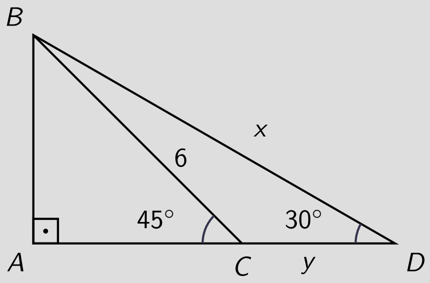
Solução: No $\triangle ABC$, $\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\overline{AB}}{6}$. Logo, $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$.

No $\triangle ABD$, $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{AB}}{x}$. Logo, $x = 6\sqrt{2}$.

Como $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1 = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\overline{AC}}$, donde $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$.

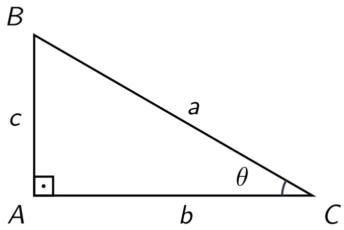
Ainda no $\triangle ABD$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\overline{AC}+y} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+y}$.

Logo, $y = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.



***Nota* 14.** A relação $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ é a trigonométrica fundamental. De fato, considere um triângulo ABC retângulo em A e $\theta = A\hat{B}C$. Então

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$



3.2.1 Exercícios

***EP* 3.29.** No triângulo ABC, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$ e $\overline{CA} = 13$. Qual a medida do ângulo $\hat{B}$?

***EP* 3.30.** No triângulo DEF, $\overline{DE} = \overline{EF} = 6$ e $\overline{FD} = 6\sqrt{2}$. Quanto mede cada ângulo do triângulo?

***EP* 3.31.** Um trapézio $ABCD$ tem uma altura $2\sqrt{3}$, bases $\overline{AB} = 4$ e $\overline{DC} = 1$, e o ângulo interno em A medindo 60°. Determine a medida do lado BC.

***EP* 3.32.** Num triângulo ABC, retângulo em A, $\alpha = A\hat{C}B$, $\operatorname{sen}\alpha = 2/3$ e $\overline{BC} = 12$. Determine o valor de $\overline{AB}$.

***EP* 3.33.** Na figura a seguir, $A\hat{D}B = A\hat{C}D = 60^\circ$, $A\hat{D}C = 90^\circ$ e $B\hat{C}D = 105^\circ$. Se $\overline{CD} = 5$ m, determine o comprimento do segmento AB.

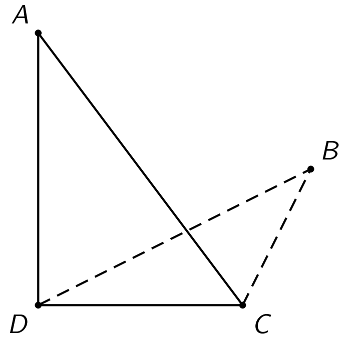


Figura 3.33

***EP* 3.34.** Num triângulo retângulo ABC, seja D um ponto da hipotenusa $\overline{AC}$ tal que os ângulos $D\hat{B}D$ tenham a mesma medida. Determine $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$.

***EP* 3.35.** Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projeteis em trajetória retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in (0, \pi/4)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, atinge-a a uma altura H, determine H em função de h e d.

***EP* 3.36.** M é um ponto interno a um ângulo de $60°$ e cujas distâncias aos lados desse ângulo são a e b. Determinar a distância do ponto M ao vértice do ângulo.

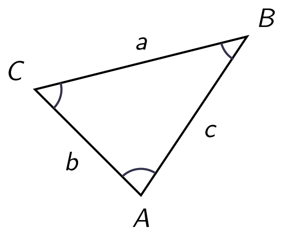
***EP* 3.37.** P é um ponto interno a um retângulo $ABCD$ que dista $3\ cm$ do vértice A, $5\ cm$ do vértice C e $4\ cm$ do vértice D. Calcule a distância entre os pontos P e B.

***EP* 3.38.** Determine o comprimento do lado AB de um triângulo ABC, cujas medianas AD e BE cortam-se em ângulo reto, sabendo que $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

Gabarito

EP 3.31. $\sqrt{13}$ **EP** 3.32. 8. **EP** 3.33. $(5\sqrt{10})/2$. **EP** 3.34. 1. **EP** 3.35. $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$. **EP** 3.36. $2 \cdot \dfrac{\sqrt{a^2ab + b2}}{\sqrt{3}}$. **EP** 3.37. $3\sqrt{2}\ cm$. **EP** 3.38. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{5}}$.

3.3 Relações Métricas num Triângulo Qualquer



Observando o triângulo representado na figura a seguir, utilizaremos as seguintes convenções:

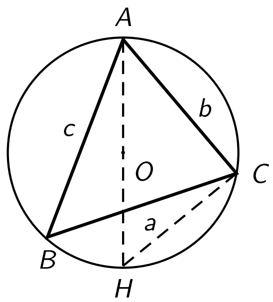
– Medidas dos ângulos internos: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

– Medidas dos lados em unidade de comprimento: $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.

Temos ainda que todo triângulo é formado por seis elementos principais, que são três lados e três ângulos; e por um elemento secundário, que é a área.

Atenção! Estudaremos duas relações no plano entre as medidas dos lados de um triângulo e seus ângulos, são elas: a **lei dos senos** e a **lei dos cossenos**.

3.3.1 Lei dos Senos



Considere um triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio R, como na figura. Temos:

- AH: diâmetro da circunferência e $\overline{AH} = 2R$;

- AO: raio da circunferência $\overline{AO} = R$;

- Medidas dos lados do triângulo ABC:

$$\overline{AB} = c, \overline{BC} = a \text{ e } \overline{AC} = b.$$

Para deduzir a lei dos senos, observe que os ângulos $\hat{H}$ e $\hat{B}$ são congruentes, pois ambos estão inscritos no mesmo arco CA. Além disso, podemos afirmar que o ângulo $A\hat{C}H$ é reto, pois o segmento de reta AH é um diâmetro. Portanto, o triângulo $\triangle ACH$ é um triângulo retângulo. Segue que:

$$\text{sen}\ \hat{H} = \text{sen}\ \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{b}{2R}.$$

Logo, $\text{sen}\ \hat{B} = \dfrac{b}{2R}$ e, portanto, $\dfrac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = 2R$. Analogamente, chegaríamos às igualdades

$$\frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} = 2R \text{ e } \frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = 2R.$$

Como estas três expressões são todas iguais a $2R$, poderemos escrever finalmente:

$$\frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} = 2R. \quad (3.3)$$

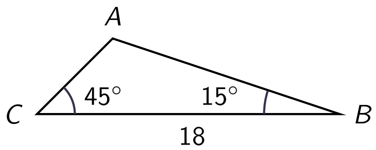
A relação (3.3) mostra que as medidas dos lados de um triângulo qualquer são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a estes lados, sendo a constante de proporcionalidade igual a $2R$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Oba! Oba!

Enunciemos assim a lei dos senos:

3.9 Teorema. [Lei dos Senos] Num triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, e a razão de proporção é igual a $2R$, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

ER **3.39.** Calcule, aproximadamente, o perímetro do triângulo da figura ao lado, sabendo que $\text{sen}\,15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e $\text{sen}(120°) = \text{sen}(60°)$.



Solução: Como neste problema temos 2 ângulos podemos encontrar a medida do terceiro ângulo. Sabendo que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$, segue que:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{A} = 180° - (15° + 45°) \Rightarrow \hat{A} = 120°.$$

Agora podemos usar a lei dos senos (3.3) para resolver o problema:

$$\diamond \quad \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \Rightarrow 18\cdot\text{sen}\,15° = b\cdot\text{sen}\,120° \Rightarrow b = \frac{18\cdot\text{sen}\,15°}{\text{sen}\,120°} = \frac{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \approx 5,37.$$

$$\diamond \quad \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \Rightarrow 18\cdot\text{sen}\,45° = c\cdot\text{sen}\,120° \Rightarrow c = \frac{18\cdot\text{sen}\,45°}{\text{sen}\,120°} \Rightarrow c = 18\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \approx 14,70.$$

O perímetro $2p$ do triângulo é dado por $2p = a+b+c \approx 18+5,37+14,70 = 18,37$. $u.c$

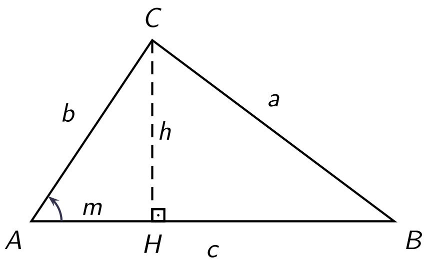
3.3.2 Lei dos Cossenos

Dado um triângulo ABC qualquer, consideraremos o ângulo $\hat{A}$, quando:

1. O triângulo ABC é acutângulo.
   - No $\triangle BCH$, temos: $a^2 = h^2 + (c-m)^2$ (I)
   - No $\triangle ACH$, temos: $h^2 = b^2 - m^2$ (II)

   Substituindo (II) em (I), temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c-m)^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot m \text{ (III)}.$$



   Temos ainda, no triângulo $\triangle ACH$ um ângulo reto em H:

$$\cos\hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b\cdot\cos\hat{A}.$$

   Substituindo-se em (III), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A}.$$

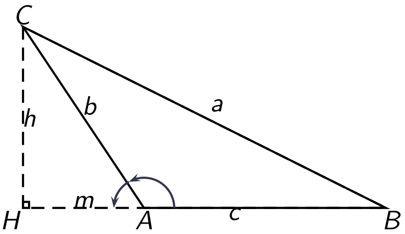
2. O triângulo ABC é obtusângulo em $\hat{A}$.
   - No $\triangle BCH$ temos: $a^2 = h^2 + (c+m)^2$ (I)
   - No $\triangle ACH$ temos: $b^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$ (II)

   Substituindo (II) em (I), temos:

   $$a^2 = b^2 - m^2 + (c+m)^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \text{ (III)}$$

   Temos ainda, no $\triangle ACH$ reto em H: $\cos(180° - \hat{A}) = -\cos\hat{A} = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = -b.\cos\hat{A}$, que substituindo em (III) temos:

   $$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (-b \cdot \cos\hat{A}) = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$



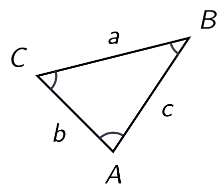
Oba! Oba!

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

3.10 Teorema. [Lei dos Cossenos] Num triângulo ABC qualquer, o quadrado da medida de um lado, é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Considerando a figura ao lado, em símbolos escrevemos a lei dos cossenos como:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\hat{A}$, $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\hat{B}$, $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\hat{C}$.



***ER* 3.40.** Um triângulo possui dois lados consecutivos medindo $4\ cm$ e $2\sqrt{3}\ cm$, e um ângulo agudo, formado por estes lados, medindo $30°$. Calcular o comprimento do terceiro lado.

Solução: Seja x a medida do terceiro lado. Pela lei dos cossenos temos que

$$x^2 = 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30°,$$

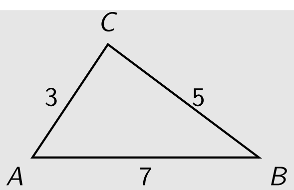
ou seja,

$$x^2 = 16 + 3 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resolvendo-se esta equação, encontraremos $x = \sqrt{7}\ cm$.

***ER* 3.41.** Qual a medida de cada ângulo de um triângulo cujos lados medem 7, 5 e 3?

Solução: Como neste exemplo conhecemos três lados do triângulo podemos usar a lei dos cossenos para encontrarmos cada um dos ângulos desconhecidos. Veja como.



Para o ângulo $\hat{A}$, temos:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \quad &\Rightarrow \quad 7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow 49 = 9 + 25 - 30 \cdot \cos\hat{A} \\ &\Rightarrow \quad 15 = -30 \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120° \end{aligned}$$

Para o ângulo $\hat{B}$, temos:

$$\begin{aligned} b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B} \quad &\Rightarrow \quad 3^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot\cos\hat{B} \Rightarrow 9 = 49 + 25 - 70\cdot\cos\hat{B} \\ &\Rightarrow \quad -65 = -70\cdot\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = -\frac{13}{14} \Rightarrow \hat{B} \approx 21,79^\circ \end{aligned}$$

Para o ângulo $\hat{C}$, temos:

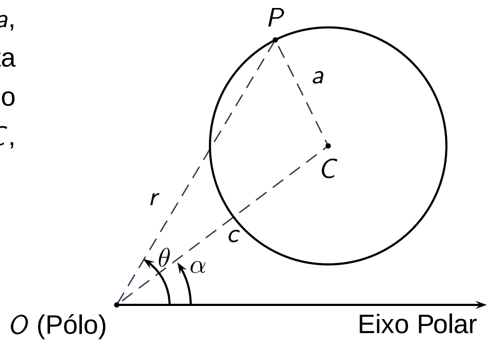
$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C} \quad &\Rightarrow \quad 5^2 = 7^2 + 3^2 - 2\cdot 7\cdot 3\cdot\cos\hat{C} \Rightarrow 25 = 49 + 9 - 42\cdot\cos\hat{C} \\ &\Rightarrow \quad -33 = -42\cdot\cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C} = -\frac{11}{14}\hat{C} \approx 38,21^\circ \end{aligned}$$

3.3.3 Aplicações

Coordenadas Polares - Equação de uma Circunferência

Seja $C(c,a)$ o centro de uma circunferência de raio a, como mostra a figura ao lado. Seja $P(r,\theta)$ um ponto desta circunferência. Tracemos os raios vetores de P e C e o raio da circunferência $\overline{CP}$, assim formando o triângulo $\triangle OPC$, e deste triângulo utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} r^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot r\cdot\cos(\theta-\alpha) &= a^2 \\ &\text{ou} \\ r^2 - 2\cdot c\cdot r\cdot\cos(\theta-\alpha) + c^2 - a^2 &= 0. \end{aligned}$$



Casos Especiais

1. Quando o centro está no pólo, temos:

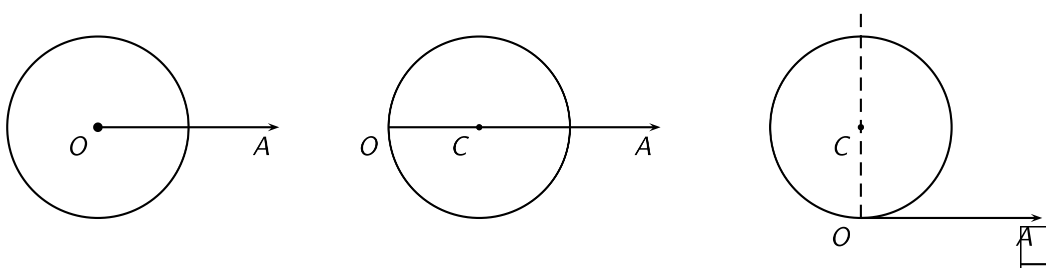
$$c = 0 \Rightarrow r = a,$$

2. Quando a circunferência passa pelo pólo e o centro se encontra no eixo polar, temos:

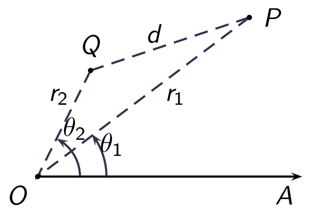
$$\alpha = 0 \text{ e } c = a \Rightarrow r = \pm 2\cdot a\cdot\cos\theta.$$

3. Quando a circunferência passa pelo pólo e seu centro se encontra sobre o eixo que forma um ângulo de 90° com o eixo polar, temos:

$$\alpha = 90^\circ \text{ e } c = a \Rightarrow r = \pm 2\cdot a\cdot \operatorname{sen}\theta.$$



Distância entre Dois Pontos



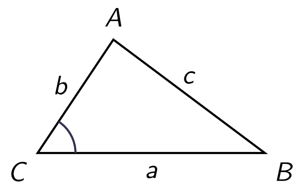
Dados dois pontos $P(r_1, \theta_1)$ e $Q(r_2, \theta_1)$ e utilizando a lei dos cossenos, a distância d entre P e Q, é dada por:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Desigualdade Triangular

Vimos que para que exista um triângulo, o comprimento de qualquer um dos lados é menor que a soma e maior que a diferença do comprimento dos outros dois lados. Este resultado pode ser verificado pelo teorema do cossenos. De fato, de acordo com a figura

$$-1 < \cos \hat{C} < 1$$



e, pela lei dos cossenos,

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Assim,

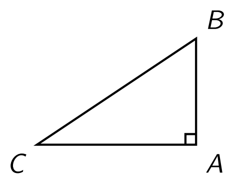
$$\begin{aligned}
-1 < \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 1 \quad & \Rightarrow \quad -2ab < a^2 + b^2 - c^2 < 2ab \\
& \Rightarrow \quad -a^2 - b^2 - 2ab < -c^2 < -a^2 - b^2 + 2ab \\
& \Rightarrow \quad -(a+b)^2 < -c^2 < -(a-b)^2 \\
& \Rightarrow \quad (a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2 \\
& \Rightarrow \quad |a-b| < c < a+b
\end{aligned}$$

Importante! O comprimento de qualquer um dos lados de um triângulo é menor que a soma e maior que a diferença do comprimento dos outros dois lados.

Natureza de um Triângulo

Utilizando a lei dos cossenos, e seja $\cos \hat{A} = k$, com $k \in \mathbb{R}$, façamos a seguinte análise:

1. Se o ângulo $\hat{A}$ for reto, temos $k = \cos 90^\circ = 0$. Logo,

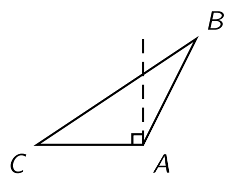


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot 0 = b^2 + c^2,$$

ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras). Assim, quando $\hat{A}$ é reto o triângulo é retângulo.

2. Se o ângulo $\hat{A}$ for obtuso, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot k.$$



Sabendo que $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$, temos $k < 0$. Assim,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot k.$$

Logo, $a^2 > b^2 + c^2$ e, neste caso, o triângulo é dito obtusângulo.

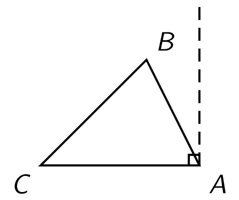
3. Se o ângulo A for agudo, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot k.$$

Sabendo que $0^\circ < \hat{A} < 90^\circ$, temos $k > 0$. Assim,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot k.$$

Logo, $a^2 < b^2 + c^2$ e, neste caso, o triângulo é dito acutângulo.



***Nota* 15.** Na verificação da natureza de um triângulo, tomamos o quadrado do comprimento do maior dos lados e comparamos com a soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois.

Lembrete! O maior dos lados se opõe ao ângulo de maior medida, e vice-versa.

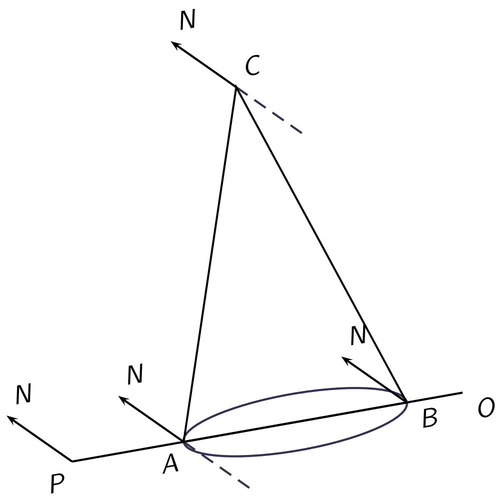
Isto é, conhecendo as medidas dos lados de um triângulo podemos dizer se o triângulo é acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

***ER* 3.42.** Classifique o triângulo formado pelos pontos:

$$P_1\left(1, \frac{\pi}{3}\right), P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ e } P_3\,(1, 0^\circ)$$

Solução: Calcule as distâncias $d(P_1, P_2)$, $d(P_1, P_3)$ e $d(P_2, P_3)$ e utilize a nota anterior.

Topografia



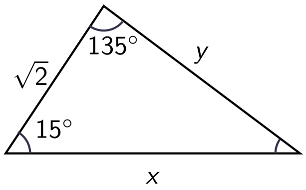
Ao visar o ponto Q do ponto P, o agrimensor verifica que $\overline{PQ}$ atravessa um pântano. A linha $\overline{PQ}$ tem a orientação $38°42'SE$ no ponto P. Na margem do pântano, sobre $\overline{PQ}$, em A o agrimensor visa o ponto B, orientado aos $61°NE$, a 1500 m. De B visa a outra margem do pântano em C, situado na linha $\overline{PQ}$, orientado $10°30'SW$. Achar a distância $\overline{BC}$, o ângulo que deve girar o aparelho em C para prosseguir na direção primitiva da linha $\overline{PQ}$ e, finalmente, a distância $\overline{AC}$ através do pântano.

Dois carros partem em linha reta de uma praça no mesmo instante, onde que um segue numa direção diferente do outro. Sabe-se que o ângulo formado entre as linhas da direção é de $60°$ e as velocidades dos carros são de 60 e 80 quilômetros horários respectivamente. Decorridos 15 minutos, qual a distância que separa esses carros?

Pratique! É necessário medir a altura de uma torre que está do outro lado de um rio, de modo que no momento não é possível atravessar este rio. Considerando o terreno totalmente plano, o agrimensor instalou seu teodolito a uma altura de $1,65\ m$. Considerando esta situação, de que forma você encontraria a altura da torre?

3.3.4 Exercícios

***EP* 3.43.** No triângulo ao lado, calcular as medidas de x e y indicadas, sabendo que $\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



***EP* 3.44.** Num triângulo seus lados são indicados por x, $x+1$ e $x+2$. O maior lado é $x+2$ e um dos ângulos mede 120°. Determine o perímetro deste triângulo.

***EP* 3.45.** Uma equipe A de trabalho parte de um ponto M_1 em linha reta, abrindo uma estrada de $800\ m$ de comprimento, formando um ângulo de 60° com a linha reta que liga M_1 a M_2 que estão separados por $1092\ m$. Uma equipe B de trabalho está em M_2 que iniciará uma segunda estrada que ligará M_2 até onde está a equipe A. Sob que ângulo deve partir a equipe B e qual o comprimento desta nova estrada?

***EP* 3.46.** É necessário medir a distância entre dois pontos, sabendo que um é inacessível. Como fazer isso?

***EP* 3.47.** Num triângulo $\triangle ABC$, $b = 4\ cm$, $c = 5\ cm$ e $\hat{A} = 60^\circ$. Determine o terceiro lado e os dois outros ângulos deste triângulo.

***EP* 3.48.** Numa corrida de Fórmula 1, exatamente sobre a linha de chegada, a certa altura há um helicóptero de TV. Ao apontar na reta de chegada, um corredor A o vê sob um ângulo de elevação de 20°, enquanto o corredor B, que está $120\ m$ à sua frente, vê o helicóptero sob um ângulo de 45°. Qual a altura do helicóptero? (Desprezar a altura dos corredores)

***EP* 3.49.** É preciso saber a distância que separa dois pontos A e B que estão do outro lado de um rio. Não é possível atravessar este rio. De que forma você faria isso, supondo que você possui um teodolito (aparelho que determina a medida de um ângulo) e uma trena.

***EP* 3.50.** Mostre que os pontos $\left(3, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(7, \dfrac{\pi}{3}\right)$ e $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$ são vértices de um triângulo isósceles.

***EP* 3.51.** Discutir a fórmula da distância da seção 3.3.3 quando os pontos são colineares com o pólo. Considerar os casos quando os pontos estão num mesmo semiplano e em semiplanos opostos em relação ao eixo polar.

***EP* 3.52.** Discuta e dê solução para encontrar a área de um triângulo, cujos vértices estão em coordenadas polares, e o pólo se encontra na região interna do triângulo. Faça o mesmo quando o pólo está na região externa.

***EP* 3.53.** Determine o intervalo que o terceiro lado de um triângulo vai está contido, sabendo que dois lados deste triângulo medem $9\ cm$ e $12\ cm$, atendendo as condições:

(a) o triângulo é retângulo; (b) é obtusângulo; (c) é acutângulo.

***EP* 3.54.** No triângulo ABC, os lados AC e BC medem $8\ cm$ e $6\ cm$, respectivamente, e o ângulo A vale 30°. O seno do ângulo B vale:

***EP* 3.55.** Pra calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra junto a A afasta-se $20\ m$ da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a $40\ m$ de C, do qual ainda pode ver as árvores. Tendo verificado que os ângulos DCB e BDC medem, respectivamente, cerca de 15° e 120°, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6} = 2,4$?

***EP* 3.56.** Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de T é:

***EP* 3.57.** Se em um triângulo ABC o lado AB mede $3\ cm$, o lado BC mede $4\ cm$ e o ângulo interno formado entre os lados AB e BC mede 60°. calcule $\overline{AC}$.

***EP* 3.58.** Na figura, $ABCD$ é um quadrado cuja área mede $4\ m^2$, e C é o ponto médio do segmento AE. Determine o comprimento de BE.

***EP* 3.59.** Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C, sobre um mapa sem escala. Sabe-se que, no mapa, as cidades A, B e C determinam um triângulo em que $B\hat{A}C = 60°$, $\overline{AB} = 80\ km$ e $\overline{AC} = 120\ km$, onde A é uma cidade conhecida. Determine, aproximadamente, a distância entre as cidades B e C.

***EP* 3.60.** Um navegador devia viajar durante duas horas, no rumo nordeste, para chegar a certa ilha. Enganou-se, e navegou duas horas no rumo norte. Tomando, a partir daí, o rumo correto, em quanto tempo, aproximadamente, chegará à ilha?

***EP* 3.61.** Num retângulo $ABCD$, o ponto P está sobre o lado DC, de modo que a medida de DP corresponde ao triplo da medida do lado AD, enquanto a medida de CP vale o dobro de BC. Determine a medida, em radianos, do ângulo $A\hat{P}B$.

***EP* 3.62.** Na figura 3.62, $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$ é o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio unitário e de centro no ponto 0.

(a) Calcule o valor de ℓ;

(b) Mostre que $\cos 36° = (1 + \sqrt{5})/4$.

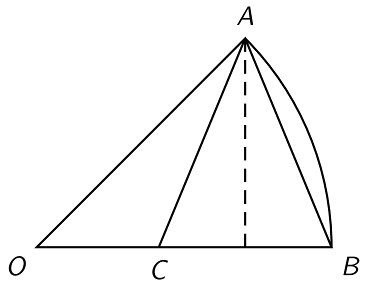


Figura 3.62

***EP* 3.63.** Determinar a natureza, quanto aos ângulos, de um triângulo, cujos lados medem:

(a) 6, 8 e 11;

(b) 10, 14 e 17.

***EP* 3.64.** Os lados de um triângulo medem $7\ cm$, $15\ cm$ e $20\ cm$. Calcular a projeção do menor lado sobre o maior.

***EP* 3.65.** Os lados de um triângulo são: $\overline{AB} = 3\ dm$, $\overline{BC} = 5\ dm$, $\overline{AC} = 7\ dm$. Calcular a projeção do lado AB sobre a reta que contém o lado BC.

***EP* 3.66.** Dois lados de um triângulo são: $\overline{AB} = 7\ dm$, $\overline{AC} = 8\ cm$. Calcular o comprimento do lado BC, sabendo que a sua projeção sobre a reta que contém o lado AB mede $11\ cm$.

***EP* 3.67.** Num triângulo ABC, o lado $\overline{AB} = 6\ m$, o lado $\overline{AC} = 8\ m$ e a medida $\overline{AM} = 5\ m$. Calcular o comprimento do lado BC.

***EP* 3.68.** Os lados de um triângulo são $\overline{AB} = 12\ m$, $\overline{AC} = 15\ m$, $\overline{BC} = 18\ m$. Calcular o comprimento da bissetriz interna relativa ao ângulo $\hat{A}$.

***EP* 3.69.** Calcular o comprimento da diagonal BD de um paralelogramo $ABCD$, sabendo que o lado $\overline{AB} = 4\ cm$, $\overline{BC} = 5\ cm$ e $\hat{B} = 60°$.

***EP* 3.70.** Os lados de um triângulo são $\overline{AB} = 4\ m$, $\overline{AC} = 8\ m$, $\overline{BC} = 5\ m$. Prolonga-se o lado BC de um segmento $\overline{CD} = \overline{BC}$. Calcular $\overline{AD}$.

***EP* 3.71.** Os lados de um triângulo são $\overline{AB} = 13\ m$, $\overline{AC} = 11\ m$, $\overline{BC} = 16\ m$. A mediana AM e a bissetriz interna BD cortam=se em I. Calcular $\overline{IM}$.

***EP* 3.72.** Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas a e b e uma das diagonais tem por medida c. Determine a medida da outra diagonal.

***EP* 3.73.** Num paralelogramo de lados medindo a e b, calcule a soma dos quadrados das diagonais.

***EP* 3.74.** A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um α e o outro 2α. Determine a razão entre os comprimentos dos lados menor e maior.

***EP* 3.75.** Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$. Sejam a, b e c a medida dos lados opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Sabendo que $a = 2\sqrt{3}$ e que $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ é uma progressão aritmética, calcule as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo ABC.

***EP* 3.76.** Calcular o ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC, sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, iguais aos $8/3$ e $7/3$ do comprimento do lado AB.

***EP* 3.77.** Os lados de um triângulo são $\overline{AB} = 6\ cm$, $\overline{AC} = 7\ cm$ e $\overline{BC} = 5\ cm$. Calcular a distância do ponto de concurso das medianas (baricentro) ao lado AC.

***EP* 3.78.** Sobre os catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC constroem-se externamente triângulos eqüiláteros, cujos centros são X e Y. Prove que $\overline{XY}^2 = \dfrac{1}{3}(a^2 + bc\sqrt{3})$.

***EP* 3.79.** A medida dos lados de um triângulo são $\overline{AB} = 21\ cm$, $\overline{AC} = 17\ cm$ e $\overline{BC} = 26\ cm$. Calcular a distância do vértice B ao ponto médio da mediana AM.

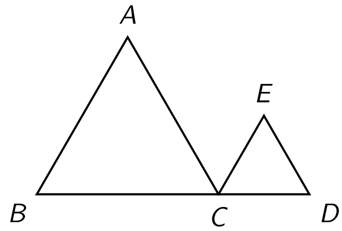
***EP* 3.80.** $ABCD$ é um paralelogramo o qual $\overline{AB} = 5\ cm$ e $\overline{AD} = 3\ cm$. Calcular o comprimento da diagonal AC, sabendo que a sua projeção sobre a reta que contém o lado AB mede $6\ cm$.

***EP* 3.81.** M é um ponto qualquer da base BC de um triângulo isósceles ABC. Prove que

$$\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MB}.$$

***EP* 3.82.** Calcular o comprimento do lado de um triângulo eqüilátero cujos vértices estão situados, respectivamente, sobre três retas paralelas, sabendo que são a e b as distâncias da paralela intermediárias às outras duas.

***EP* 3.83.** De um ponto fora de uma reta traçam-se a esta reta a perpendicular e duas oblíquas que medem $7\ m$ e $5\ m$, respectivamente. Calcular a distância entre o pé da perpendicular e o da menor oblíqua, sabendo que os pés das oblíquas distam $4\ m$.



***EP* 3.84.** Na figura ao lado, os triângulos ABC e BED são eqüiláteros de lados medindo $2a$ e a, respectivamente. Calcule a medida do segmento $\overline{AE}$.

***EP* 3.85.** O raio do círculo circunscrito a um triângulo ABC é R, o circuncentro é O e o baricentro é G. Demonstrar que a distância do circuncentro ao baricentro é dada pela fórmula:

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Gabarito

EP 3.54. $2/3$. **EP** 3.55. A distância entre as duas árvores é de $28\ m$. **EP** 3.56. $1/8$. **EP** 3.57. $\sqrt{13}\ cm$. **EP** 3.58. $2\sqrt{5}$. **EP** 3.59. $105,83$. **EP** 3.60. $1,5\ h$. **EP** 3.61. $(3\pi)/4$. **EP** 3.62. (a) $\ell(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, (b) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$. **EP** 3.63. (a) obtusângulo (b) acutângulo. **EP** 3.64. $\dfrac{28}{5}$. **EP** 3.65. $\dfrac{3}{2}$. **EP** 3.66. $13\ cm$. **EP** 3.67. $10\ cm$. **EP** 3.68. $10\ cm$. **EP** 3.69. $\sqrt{61}\ cm$. **EP** 3.70. $9\sqrt{2}m$. **EP** 3.71. $\dfrac{24}{7}$. **EP** 3.72. $\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. **EP** 3.73. $2a^2+2b^2$. **EP** 3.74. $\dfrac{1}{2\cos\alpha}$. **EP** 3.75. Lados: $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ e 6; Ângulos: 30°, 60° e 90°. **EP** 3.76. $\hat{A} = 60^\circ$. **EP** 3.77. $\dfrac{4\sqrt{6}}{7}\ cm$. **EP** 3.78. Demonstração. **EP** 3.79. $16\ cm$. **EP** 3.80. $2\sqrt{11}\ cm$. **EP** 3.81. Demonstração. **EP** 3.82. $2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$. **EP** 3.83. $1\ m$. **EP** 3.84. $a\sqrt{3}$. **EP** 3.85. Demonstração.

Circunferência e Círculo

Considere um plano π e um ponto O deste plano.

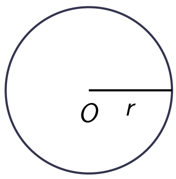
3.11 Definição. Uma circunferência $S(O, r)$ de centro em O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano que estão a uma distância r do ponto O.

Um ponto P é interno à circunferência de centro O e raio r se $d(O, P) < r$. O ponto P pertence à circunferência se $d(O, P) = r$ e P é externo à circunferência se $d(O, P) > r$.

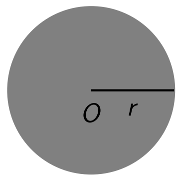
O conjunto dos pontos internos (externos) a uma circunferência é chamado interior (exterior).

3.12 Definição. Um círculo $\varphi(O, r)$ de centro em O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano que estão a uma distância inferior ou igual a r do ponto O.

Assim, o círculo é um conjunto formado pelos pontos da circunferência e de seu interior.

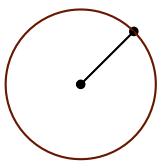
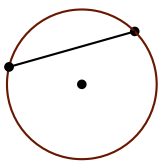
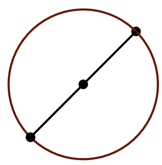


$S(O, r) = \{P \in \pi; d(O, P) = r\}$



$\varphi(O, r) = \{P \in \pi; d(O, P) \leq r\}$

3.4 Elementos da Circunferência e do Círculo

Raio:	Corda:	Diâmetro:
segmento que une o centro da circunferência a qualquer de seus pontos.	segmento ligando dois pontos de um circunferência.	corda que passa pelo centro da circunferência.
		

Atenção! Estes elementos estão também presentes no círculo.

Considere uma circunferência S de centro em O e raio r e sejam A e B dois pontos de S que não estejam nas extremidades do diâmetro de S.

3.13 Definição. Um arco de circunferência é uma parte ou porção da circunferência limitada pelos pontos A e B. Neste caso, os pontos A e B delimitam dois arcos de circunferência em S: o arco menor e o maior. Os pontos A e B são chamados de extremidades do arco. Notação: $\widehat{AB}$.

***Nota* 16.** Uma semi-circunferência é um arco cujas extremidades são também extremidades de um diâmetro da circunferência.

3.14 Definição. Se O é centro do círculo, então $A\hat{O}B$ é chamado de ângulo central. A medida em graus do arco menor determinado pelos pontos A e B é por definição a medida do ângulo central $A\hat{O}B$. A medida em graus do arco maior é definida como sendo $360° - a°$, onde $a°$ é a medida em graus do arco menor. No caso em que AB é um diâmetro a medida dos dois arcos é, claramente, $180°$.

3.15 Definição. O setor circular é o conjunto dos pontos comuns ao interior de um ângulo e de um círculo que possuem, respectivamente, centro e vértice comuns.

3.16 Definição. Um segmento circular é o conjunto de pontos obtidos da interseção do semi-plano com origem na reta que passa por dois pontos distintos A e B da circunferência S com o círculo de mesmo centro e raio que a circunferência S. Se A e B são extremidades de um diâmetro de S, o segmento é chamado semi-círculo.

3.17 Definição. Se uma reta intercepta uma circunferência em dois pontos, então diremos que ela é uma secante à circunferência, ou ainda, que a reta e a circunferência são secantes.

3.18 Proposição. Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se, e somente se, a divide em dois segmentos congruentes.

Prova: Seja s uma reta secante a uma circunferência S de centro O e raio r, passando pelos pontos A e B que não são extremidades de um diâmetro. Considere I o ponto de interseção entre a reta s e o raio r. Se o raio r de S é perpendicular à s, O triângulo OIA é congruente ao triângulo OIB (caso LAA_O). A implicação não demonstrada fica como exercício para o leitor. □

Importante! Quando uma reta e um círculo têm apenas um ponto em comum, dizemos que a reta tangencia o círculo e chamamos a reta de tangente ao círculo. O ponto comum entre uma tangente e um círculo é chamado de ponto de tangência ou ponto de contato.

3.19 Proposição. Uma reta é tangente a um círculo se, e somente se, ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.

Prova: Seja S uma circunferência de centro O e raio r e T um de seus pontos. Seja t a reta que passa pelos pontos T e E, onde $E \notin S$. Se o raio OT é perpendicular a t e o segmento OE é oblíquo, a medida de segmento OE é maior que a do segmento OT. Logo o ponto E é exterior a S. Conseqüentemente, a reta t tem somente um ponto T comum a S, pois, os demais são externos. Portanto, t é tangente a S. A implicação não demonstrada fica como exercício para o leitor. □

3.5 Ângulos na Circunferência

Como a definição de ângulo central foi vista, vejamos outras definições e propriedades envolvendo ângulos e circunferências.

3.5.1 Ângulo Inscrito

3.20 Definição. Ângulo cujo vértice V está sobre a circunferência e os lados secantes interceptam esta circunferência em pontos A e B distintos do ponto V. Os pontos A e B determinam dois arcos. O arco que não contiver o ponto V é chamado de arco correspondente ao ângulo inscrito dado. Diremos também que o ângulo subtende o arco.

3.5.2 Ângulo Excêntrico Interior

3.21 Definição. Ângulo cujo vértice é interior à circunferência.

3.5.3 Ângulo Excêntrico Exterior

3.22 Definição. Ângulo cujo vértice é exterior à circunferência.

3.23 Proposição. Em um mesmo círculo, ou em círculos do mesmo raio, cordas congruentes determinam ângulos centrais congruentes e reciprocamente.

Prova: Deixada para o leitor

3.24 Proposição. Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco central correspondente.

Prova: Sejam $S(O, r)$ uma circunferência de centro O e raio medindo r, AVB o ângulo inscrito de medida α e $A\hat{O}B$ o ângulo central correspondente de medida β. Devemos considerar 3 casos:

1º - O centro O está pertence a um dos lados do ângulo de medida α;

2º - O centro O é interno ao ângulo de medida α;

3º - O centro O é externo ao ângulo de medida α.

No caso 1º $\overline{OV} = \overline{AO} = r$, ou seja, o triângulo OVA é isósceles. Segue que $\alpha = AVO = OAV$. Como β é ângulo externo no triângulo OVA, segue que $\beta = 2\alpha$.
No caso 2º prolongando-se o segmento VO, este intercepta a circunferência em um ponto C. Façamos as medidas dos ângulos AVC, CVB, AOC e CVB como sendo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2, respectivamente. De acordo com o caso 1º, temos que $\beta = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2$. Somando-se estas duas equações, chegamos da mesma forma, a $\beta = 2\alpha$.
No caso 3º prolongando-se o segmento VO, este intercepta a circunferência em um ponto C. Façamos as medidas dos ângulos BVC, AVC, BOC e AOC como sendo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2, respectivamente. De acordo com o caso 1º, temos que $\beta_1 = a\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2$. Subtraindo-se a primeira destas equações pela segunda, chegamos da mesma forma, a $\beta = 2\alpha$.
Portando, $\alpha = \beta/2$. □

3.25 Corolário. Todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos que subtendem um semicírculo são retos.

Prova: Exercício

3.26 Definição. [Ângulo de segmento ou semi-inscrito a uma circunferência] É um ângulo que possui vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.

3.27 Proposição. A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

3.6 Potência de Ponto

3.28 Definição. Definição: Seja P um ponto qualquer de um plano, $S(O, r)$ uma circunferência de centro em O e raio R e s uma reta secante a S em A e B contendo o ponto P. Uma potência do ponto P é dada por:

$$Pot(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

3.29 Proposição. Sejam s_1 e s_2 duas retas secantes a uma circunferência de centro em O e raio r, nos pontos A, B, C e D, e que se interceptam em P. Então $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Prova: Temos dois casos a considerar. No primeiro, o ângulo em P é oposto pelo vértice e no segundo caso, o ângulo em P é comum. Como os ângulos em A e C são inscritos e possuem o mesmo arco na circunferência, temos $\hat{A} = \hat{C}$. Desta forma, os triângulos PAD e PCB são semelhantes (ALA), ou seja, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$. Logo, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. □

As duas proposições a seguir devem ser demonstradas pelo leitor.

3.30 Proposição. Se os dois lados de um ângulo de vértice P são tangentes a um círculo nos pontos A e B, então:

(a) a medida do ângulo $\hat{P}$ é igual a $180°$ menos a medida do arco menor determinado por A e B;

(b) $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Um polígono está inscrito num círculo, ou é inscritível, se seus vértices pertencem ao círculo.

3.31 Proposição. Todo triângulo está inscrito em um círculo.

Esta proposição pode ser enunciada da seguinte maneira:

3.32 Proposição. Três pontos não-colineares determinam um círculo.

Importante! De um modo geral apenas os triângulos possuem a propriedade de serem inscritíveis em círculos. Para outros polígonos a condição de que o mesmo possa ser inscrito em um círculo acarreta fortes restrições sobre as suas medidas.

3.33 Proposição. Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.

O círculo está inscrito em um polígono se todos os lados do polígono são tangentes ao círculo. Quando tal ocorre diz-se que o polígono circunscreve o círculo.

3.34 Proposição. Todo triângulo possui um círculo inscrito.

3.35 Proposição. Todo polígono regular está inscrito em um círculo.

3.36 Corolário. Todo polígono regular possui um círculo inscrito.

3.7 Exercícios Propostos

***EP* 3.86.** Pode existir um círculo de raio igual a $6\ cm$ e no qual uma corda meça $14\ cm$?

EP 3.87. Em um círculo cujo raio mede $30\ cm$ pode existir uma corda que meça $45\ cm$?

EP 3.88. Considere dois círculos de raios r_1 e r_2. Mostre que se eles se intersectam em mais de um ponto então $r_1 + r_2$ é maior do que a distância entre seus centros.

EP 3.89. Dados dois círculos de raios r_1 e r_2 cujos centros distam d, mostre que, se r_1 e $r_2 > d$, então os dois círculos se intersectam em dois pontos.

EP 3.90. Diremos que dois círculos são tangentes se são tangentes a uma mesma reta em um mesmo ponto. O ponto mencionado é chamado de ponto de contato. Mostre que, quando dois círculos são tangentes, os dois centros e o ponto de contato são colineares.

EP 3.91. Dois círculos são ditos tangentes exteriores se ficam de lados opostos da reta tangente comum. Se os dois ficam do mesmo lado da reta tangente, diz-se que os dois são tangentes interiores. Qual a distância entre os centros de dois círculos que são tangentes exteriores sabendo-se que seus raios medem $2\ cm$ e $5\ cm$?

EP 3.92. Qual a distância entre os centros de dois círculos que são tangentes interiores se seus raios medem $2\ cm$ e $3\ cm$?

EP 3.93. O diâmetro de um círculo é $12\ cm$. Calcule a distância ao círculo de um ponto exterior que dista $15\ cm$ do seu centro.

EP 3.94. O raio de um círculo é $10\ cm$. Calcule a distância ao círculo de um ponto interior sabendo que ele dista $4\ cm$ do seu centro.

EP 3.95. Qual é o lugar geométrico dos pontos que distam $2\ cm$ de um círculo cujo raio mede $5\ cm$?

EP 3.96. Três círculos são dois a dois tangentes exteriores. Seus centros formam um triângulo eqüilátero. Qual a medida de seus raios?

EP 3.97. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, cordas congruentes são eqüidistantes do centro.

EP 3.98. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, cordas eqüidistantes do centro são congruentes.

EP 3.99. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, se duas cordas têm comprimentos diferentes, a mais curta é a mais afastada do centro.

EP 3.100. Mostre que a mediatriz de uma corda passa pelo centro do círculo.

EP 3.101. Explique porque o reflexo de um círculo relativamente a uma reta que passa pelo seu centro é o mesmo círculo. (vide capítulo ...para definição de reflexo)

EP 3.102. Em um triângulo eqüilátero mostre que o círculo inscrito e o círculo circunscrito têm o mesmo centro.

EP 3.103. Mostre que dois pontos tomados sobre uma corda e situados a igual distância de seu ponto médio são eqüidistantes.

EP 3.104. Mostre que dois pontos tomados sobre uma reta tangente a um círculo a igual distância do ponto de contato são eqüidistantes do círculo.

EP 3.105. Sucessivos arcos são marcados sobre um círculo de modo que arco tenha uma corda de mesmo comprimento que o raio. Prove que o sexto arco termina no ponto onde o primeiro arco começa.

EP 3.106. Prove que todo paralelogramo inscrito em um círculo é retângulo.

***EP* 3.107.** Prove que todo trapézio inscrito em um círculo é isósceles.

***EP* 3.108.** Prove que o segmento ligando o vértice de um polígono regular ao centro do círculo em que ele está inscrito é bissetriz do ângulo daquele vértice.

***EP* 3.109.** Dado um quadrado de lado $5\ cm$, qual o raio do círculo no qual ele está inscrito? Qual o raio do círculo que ele circunscreve?

***EP* 3.110.** Dado um triângulo eqüilátero de lado $4\ cm$, qual o raio do círculo no qual ele está inscrito? Qual o raio do círculo que ele circunscreve?

***EP* 3.111.** Dados dois círculos e duas retas, cada uma das quais tangentes aos dois círculos. Mostre que os segmentos delas determinados pelos pontos de tangência são congruentes.

***EP* 3.112.** Um círculo está inscrito em um triângulo retângulo cujos lados medem 3, 4 e 5. Determine o diâmetro do círculo.

***EP* 3.113.** Um círculo está inscrito em um triângulo retângulo cujos catetos medem b e c e a hipotenusa mede a. Determine o diâmetro do círculo.

***EP* 3.114.** Um círculo está inscrito em um triângulo eqüilátero. Determine o raio do círculo sabendo que a altura do triângulo é $6\ cm$.

tema 4 Áreas

4.1 Área de Superfícies Planas

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

Axioma 14. A toda região poligonal corresponde um número maior que zero.

Atenção! O número a que se refere este axioma é chamado de área da região.

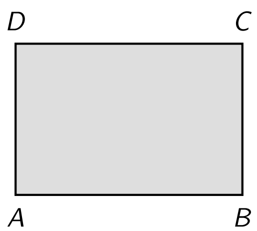
Axioma 15. Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

Axioma 16. Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes possuem mesmas áreas.

4.2 Área de Polígonos

Axioma 17. A área de um retângulo é o produto das medidas de dois de seus lados adjacentes.

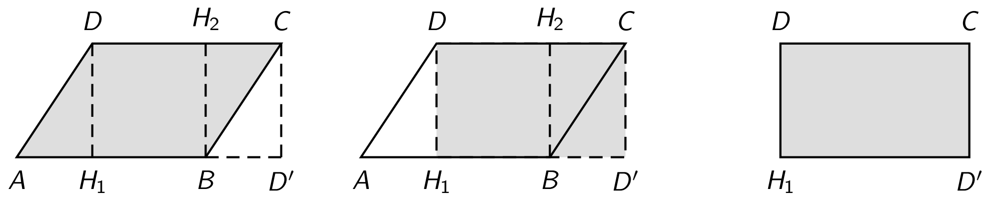
$$ABCD \text{ é retângulo } \Rightarrow A = \overline{AB} \cdot \overline{BC}.$$



A partir destes axiomas vamos determinar a área de algumas regiões poligonais simples.

4.1 Proposição. A área do paralelogramo é produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.

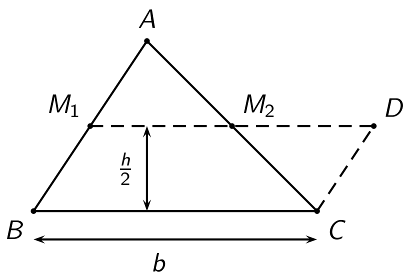
Prova: Dado um paralelogramo $ABCD$ designemos por b o comprimento do lado AB, por h o comprimento de um segmento ligando as retas que contém os segmentos AB e CD e que seja perpendicular a ambas (este segmento é chamado de altura do paralelogramo relativamente ao lado AB), por H_1 o pé da perpendicular ao lado AB e que passa pelo vértice D de e por H_2 o pé da perpendicular ao lado CD e que passa pelo vértice B.



Sendo $ABCD$ um paralelogramo, temos que $AD \equiv BC$, $AH_1 \equiv CH_2$ e $DH_1 \equiv BH_2$. Podemos decompor este paralelogramo em dois triângulos congruentes $\triangle AH_1D$ e $\triangle CH_2B$ e num retângulo H_1BH_2D e remontar o retângulo AH_1H_2D' (ver figura). Segue que o retângulo ABH_2D' tem base b e altura h. Pelo axioma anterior, a área A tem medida $b \cdot h$. □

4.2 Proposição. A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.

Prova: Considere um triângulo $\triangle ABC$ de altura h. Tracemos duas paralelas, uma ao segmento BC e que passa pelos pontos médios M_1 do segmento AB e M_2 do segmento AC e a outra ao segmento AB e que passa pelo ponto C. Observe que estas retas se interceptam num ponto o qual designaremos por D (ver figura abaixo).



O segmento M_1M_2 se constitui na base média do triângulo $\triangle ABC$, desta forma, podemos decompô-lo em um trapézio BCM_2M_1 e em um triângulo $\triangle AM_1M_2$, ambos de altura $\frac{h}{2}$. Observe que o triângulo $\triangle AM_1M_2$ é congruente ao triângulo $\triangle CM_2D$ (caso LAA_O). Assim, o paralelogramo $BCDM_1$ possui a mesma área do triângulo $\triangle$ (ver figura). Segue que o paralelogramo $BCDM_1$ tem base b e altura $\frac{h}{2}$. Pelo axioma anterior, a área A tem medida $b \cdot \frac{h}{2}$. □

Pratique! Fica como exercício a prova dos resultados a seguir:

4.3 Proposição. A área A de um trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura h pela soma dos comprimentos de suas bases maior e menor, respectivamente, B e b. Simbolicamente temos:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}.$$

4.4 Proposição. A área A de um losango é a metade do produto dos comprimentos de suas diagonais, D e d, isto é:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}.$$

Nota 17. O losango é um paralelogramo e, portanto, sua área também é dada por:

$$A_L = b \cdot h$$

4.2.1 Polígono Regular

4.5 Proposição. Considere um polígono regular com n lados de comprimentos iguais a ℓ e de apótema de comprimento m. Então,

$$A_{pol} = p \cdot m.$$

Prova: Podemos decompor um polígono regular com n lados de comprimentos iguais a ℓ e de apótema de comprimento m em n triângulos de base ℓ e altura m. Portanto,

$$\left.\begin{array}{rcl} A_{pol} & = & n \cdot A_T \\ A_T & = & \dfrac{\ell \cdot m}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{pol} = \frac{n \cdot \ell \cdot m}{2} = \frac{2p \cdot m}{2} = p \cdot m.$$

□

4.6 Proposição. A área de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio R é dada por:

$$\frac{1}{2} R^2 n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{360°}{n}\right).$$

4.2.2 Exercícios

***EP* 4.1.** Determine a área de um triângulo eqüilátero de lado ℓ.

***EP* 4.2.** O raio do círculo inscrito em um polígono regular é chamado de apótema do polígono regular. Prove que a área de um polígono regular é igual à metade do produto de seu perímetro por seu apótema.

***EP* 4.3.** Determine a área de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio R.

***EP* 4.4.** Prove que a razão entre os comprimentos de dois círculos é igual a razão entre seus raios.

***EP* 4.5.** Prove que a razão entre as áreas de dois discos é igual a razão entre os quadrados dos seus raios.

***EP* 4.6.** Se os diâmetros de dois discos são 3 e 6, qual a relação entre as suas áreas?

***EP* 4.7.** Qual a área de um quadrado inscrito em um círculo cujo raio mede $5\ cm$?

***EP* 4.8.** Qual é a relação entre as áreas de dois hexágonos regulares cujos lados medem $2\ cm$ e $3\ cm$?

***EP* 4.9.** Dá-se um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, com $a > b$ e de altura h. Demonstrar que a diferença entre áreas dos triângulos que têm por bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, e por vértice oposto a interseção das diagonais é $\dfrac{(a-b) \cdot h}{2}$.

***EP* 4.10.** Determinar a área de um retângulo em função de sua diagonal d sabendo que a diagonal é o triplo de sua altura.

***EP* 4.11.** Determinar a área de um quadrado em função da sua diagonal d.

***EP* 4.12.** A área de um retângulo é $40\ cm^2$ e sua base excede de $6\ cm$ sua altura. Determinar a altura do retângulo.

***EP* 4.13.** Um retângulo têm $24\ cm^2$ de área e $20\ cm$ de perímetro. Determinar suas dimensões.

***EP* 4.14.** A base de um retângulo é o dobro de sua altura. Determinar suas dimensões sendo $72\ cm^2$ sua área.

***EP* 4.15.** As bases de um trapézio isósceles medem respectivamente $4\ cm$ e $12\ cm$. Determinar a área desse trapézio sabendo que o semi-perímetro do trapézio é igual a $13\ cm$.

***EP* 4.16.** Uma das bases do trapézio excede a outra de $4\ cm$. Determinar as medidas dessas bases sendo $40\ cm^2$ a área do trapézio e $5\ cm$ a altura.

***EP* 4.17.** As diagonais de um losango estão entre si como $\frac{2}{7}$. Determinar a área desse losango sabendo que a soma de suas diagonais é igual ao perímetro de um quadrado de $81\ cm^2$ de área.

***EP* 4.18.** Suponhamos que se percorra um triângulo num sentido determinado e que se prolongue, nesse sentido, cada lado de um comprimento igual ao próprio lado que se prolonga. Demonstrar que a área do triângulo que tem por vértices as extremidades dos prolongamentos é igual a sete vezes a área do triângulo dado.

***EP* 4.19.** O perímetro de um losango é de $60\ cm$. Calcule a medida de sua área, sabendo que a sua diagonal maior vale o triplo da menor.

***EP* 4.20.** Determinar a área de um losango sendo $120\ cm$ o seu perímetro e $36\ cm$ a medida da sua diagonal menor.

***EP* 4.21.** Determinar o lado de um quadrado, sabendo-se que se aumentarmos seu lado de $2\ cm$ sua área aumenta $36\ cm^2$.

***EP* 4.22.** Determinar o lado de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um retângulo cuja base excede de 3 a altura, sendo $66\ cm$ a soma do dobro da base com o triplo da altura.

***EP* 4.23.** Um quadrado e um losango tem o mesmo perímetro. Determinar a razão entre área do quadrado e do losango sabendo que as diagonais do losango estão entre si como $\frac{3}{5}$ e que a diferença entre elas é igual a $40\ cm$.

***EP* 4.24.** Um triângulo eqüilátero, um quadrado e um hexágono regular têm o mesmo perímetro, que é $120\ cm$. Determinar a razão entre a soma das áreas do triângulo eqüilátero e do quadrado para a área do hexágono regular.

***EP* 4.25.** Determinar a área de um retângulo cuja base e altura são, respectivamente, o lado e o apótema de um pentágono inscrito em uma circunferência de raio r.

***EP* 4.26.** Determinar a área de um hexágono regular sabendo que seu apótema mede $2\sqrt{3}\ cm$.

***EP* 4.27.** Determinar a área de um quadrado cujo lado é igual ao lado de um octógono regular inscrito em um círculo de raio r.

***EP* 4.28.** Determine a razão entre as áreas dos círculos inscrito e circunscrito a um hexágono regular.

Gabarito

EP 4.1. $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. **EP** 4.3. $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$ **EP** 4.6. $A_D = 4A_d$. **EP** 4.7. $50\ cm^2$. **EP** 4.8. $4A_H = 9A_h$. **EP** 4.10. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. **EP** 4.11. $\frac{d^2}{2}$ **EP??**. $h = 4$. **EP** 4.13. 4×6. **EP** 4.14. 12×6. **EP** 4.15. $24\ cm^2$. **EP** 4.16. $B = 10$ e $b = 4$. **EP** 4.17. $112\ cm^2$. **EP** 4.19. $135\ cm^2$. **EP** 4.20. $864\ cm^2$. **EP** 4.21. $8\ cm$. **EP** 4.22. $\frac{729}{4}cm^2$. **EP** 4.23. $\frac{17}{15}$. **EP** 4.24. $\frac{4+3\sqrt{3}}{6}$. **EP** 4.25. $\frac{r^2}{4}(\sqrt{15-2\sqrt{5}})$. **EP** 4.26. $24\sqrt{3}\ cm^2$. **EP** 4.27. $r^2(2-\sqrt{2})$. **EP** 4.28. $\frac{3}{4}$.

4.2.3 Outras Equações que Determinam a Área de um Triângulo

A Fórmula Trigonométrica

4.7 Teorema. A medida da área de um triângulo é a metade do produto das medidas de dois dos seus lados pelo seno do ângulo por eles formado.

Prova: Seja $\triangle ABC$ um triângulo cujos lados medem a, b e c. Sendo h a altura relativa ao lado $\overline{AC} = b$, temos que $S = \dfrac{b \cdot h}{2}$. Da trigonometria do triângulo retângulo, $\operatorname{sen} \hat{C} = \dfrac{h}{a}$. Destas relações obtemos

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C} \quad \square \tag{4.4}$$

Pratique!

Pode-se chegar, de forma análoga, a:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}.}$$

A Fórmula de Heron

Considere o triângulo $\triangle ABC$ cujos lados medem a, b e c. A Lei dos cossenos aplicada a este triângulo nos diz que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}.$$

Elevando ao quadrado a expressão (4.4) temos que:

$$\begin{aligned} 4S^2 &= a^2 \cdot b^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \hat{C} = a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - \cos^2 \hat{C}) = a \cdot b \cdot (1 + \cos \hat{C}) \cdot a \cdot b \cdot (1 - \cos \hat{C}) \\ &= (a \cdot b + a \cdot b \cdot \cos \hat{C}) \cdot (a \cdot b - a \cdot b \cdot \cos \hat{C}) \end{aligned}$$

Multiplicando este último resultado por 4, obtemos:

$$16S^2 = (2a \cdot b + 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}) \cdot (2a \cdot b - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}).$$

Completando os quadrados nas expressões contidas no segundo membro, os fatores se adequam ao uso da Lei dos cossenos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a^2 + b^2 + 2a \cdot b - a^2 - b^2 + 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}) \cdot (-a^2 - b^2 + 2a \cdot b + a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}) \\ &= [(a+b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a-b)^2] \\ &= (a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (c+a-b) \cdot (c-a+b) \\ &= (a+b+c) \cdot (a+b+c-2c) \cdot (a+b+c-2b) \cdot (a+b+c-2a). \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{16}(a+b+c) \cdot (a+b+c-2a) \cdot (a+b+c-2b) \cdot (a+b+c-2c) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \frac{1}{2}(a+b+c-2a) \cdot \frac{1}{2}(a+b+c-2b) \cdot \frac{1}{2}(a+b+c-2c) \\ &= \frac{a+b+c}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right). \end{aligned}$$

Substituindo-se o semi-perímetro $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, concluímos que: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Enunciaremos este resultado, conhecido como a Fórmula de Heron para a determinação da área de um triângulo.

4.8 Teorema. [Fórmula de Heron] Seja $\triangle ABC$ um triângulo cujos lados medem a, b e c. Então a medida da área deste triângulo é

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

em que $2p = a + b + c$ é o perímetro do triângulo $\triangle ABC$.

4.9 Teorema. Seja $\triangle ABC$ um triângulo circunscrito a uma circunferência de raio r e cujos lados medem a, b e c. Então a medida da área deste triângulo é

$$S = p \cdot r,$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semi-perímetro do triângulo $\triangle ABC$.

Prova: Seja I o centro da circunferência circunscrita pelo triângulo ABC. Assim:

$$S = S_{IAB} + S_{IBC} + S_{ICA} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} = r \cdot \frac{c+b+a}{2} = p \cdot r.$$

□

4.2.4 Exercícios

***EP* 4.29.** Determinar a área de um triângulo retângulo sabendo que um dos catetos mede $10\ m$, e o ângulo oposto e esse cateto $30°$.

***EP* 4.30.** A razão entre a base e a altura de um triângulo é $\frac{8}{5}$, sendo $52\ m$ a soma da base com a altura, determine a área do triângulo.

***EP* 4.31.** Determinar a área de um triângulo isósceles sabendo que sua base mede $6x$, e a soma dos lados congruentes $10x$.

***EP* 4.32.** Determinar a área de um triângulo isósceles de perímetro igual a $32\ m$, sabendo que sua base excede de $2\ m$ cada um dos lados congruentes.

***EP* 4.33.** Determinar a área de um triângulo eqüilátero em função de sua altura h.

***EP* 4.34.** O apótema de um triângulo eqüilátero é igual ao lado de um quadrado de $16\ m^2$ de área. Determinar a área do triângulo.

***EP* 4.35.** O perímetro de um triângulo retângulo é $90\ dm$. Determinar a área do triângulo sabendo que seus lados são inversamente proporcionais a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{13}$.

***EP* 4.36.** Em um retângulo a hipotenusa é os $\frac{5}{3}$ do cateto menor, e o cateto maior os $\frac{4}{3}$ do menor. Sendo $60\ cm$ o perímetro do triângulo, determine a sua área.

***EP* 4.37.** Calcular a área de um triângulo ABC do qual se conhecem os dados seguintes: $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e o ângulo compreendido entre estes segmentos medindo $150°$.

***EP* 4.38.** Considere um triângulo retângulo isósceles ABC de catetos $\overline{AB} = \overline{AC} =$ a e um ponto E tomando sobre o prolongamento do cateto $\overline{CA}$. Unindo-se B a E temos o segmento $\overline{BE}$ que é paralelo à bissetriz $\overline{AD}$ do ângulo reto $\hat{A}$. Determine a área do triângulo CBE em função de a.

***EP* 4.39.** Calcular a área do triângulo ABC, sendo $\overline{AB} = 4\ cm$, $\hat{A} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.

***EP* 4.40.** Determinar a área do triângulo eqüilátero em função do raio R do círculo circunscrito a esse triângulo.

***EP* 4.41.** Determinar a área de um triângulo eqüilátero em função do raio r do círculo inscrito nesse triângulo.

***EP* 4.42.** A base de um triângulo mede $12\ cm$ e sua altura $6\ cm$. Determinar a razão entre a área do triângulo e a área de um quadrado inscrito nesse triângulo sabendo que a base do quadrado está apoiada sobre a base do triângulo.

***EP* 4.43.** Determine a medida do raio de um círculo inscrito em um triângulo isósceles de lados $10\ cm$, $10\ cm$ e $12\ cm$.

***EP* 4.44.** Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base $6\ cm$, tendo lado medindo $5\ cm$.

***EP* 4.45.** Seja ABC um triângulo isósceles cujos os lados congruentes medem $5\ cm$, sendo $6\ cm$ a medida do lado $\overline{BC}$(base do triângulo). Calcule a razão entre o raio do círculo circunscrito e o raio do círculo inscrito nesse triângulo.

***EP* 4.46.** Determiner o perímetro de um triângulo retângulo sabendo que sua área é igual a $36\ cm^2$ e que a hipotenusa é igual ao dobro da altura relativa a ela.

Gabarito

EP 4.29. $50\sqrt{3}m^2$. **EP** 4.30. $320\ m^2$. **EP** 4.31. $12\ x^2$. **EP** 4.32. $48\ m^2$. **EP** 4.33. $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$. **EP** 4.34. $48\sqrt{3}\ m^2$. **EP** 4.35. $270\ dm^2$. **EP** 4.37. $150\ cm^2$. **EP** 4.37. $\frac{bc}{4}$. **EP** 4.38. a^2. **EP** 4.39. $6+2\sqrt{3}\ cm^2$. **EP** 4.40. $\frac{3\sqrt{3}}{4}R$. **EP** 4.41. $3\sqrt{3}r^2$. **EP** 4.42. $\frac{9}{4}$. **EP** 4.43. $3\ cm$. **EP** 4.44. $\frac{25}{8}$. **EP** 4.45. $\frac{25}{12}$. **EP** 4.46. $12(1+\sqrt{2})$.

4.3 Área do Círculo e de suas Partes

4.3.1 Área do Círculo

Vimos que a área de um polígono regular é o produto dos comprimentos do semi-perímetro pelo do apótema.

4.10 Teorema. A área da região limitada por uma circunferência é igual a metade do produto do raio pelo comprimento do círculo.

4.11 Corolário. A área de um disco de raio r é πr^2.

A prova do Teorema 4.10 e do Corolário 4.11 será deixada para o curso de Cálculo I.

***ER* 4.47.** Calcule a área de uma circunferência de raio igual a:

(a) $r = 5\ cm$ (b) $r = 3,5\ cm$ (c) $r = 3\ cm$ (d) $r = \frac{a}{2}\ cm$

Solução:

(a) $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\ cm^2$

(c) $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi\ cm^2$

(b) $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3,5)^2 = 12,25\pi\ cm^2$

(d) $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2\pi}{4}\ cm^2$

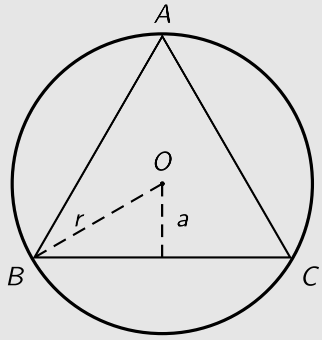
***ER* 4.48.** Calcular a área da região limitada por duas circunferências concêntricas, uma com raio $10\ cm$ e a outra com raio $6\ cm$.

Solução: Na figura a região está pintada de verde e sua área é a área do círculo maior menos a área do círculo menor, ou seja,

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(100 - 36) = 64\pi\ cm^2.$$

***ER* 4.49.** Calcular a área de um círculo circunscrito em um triângulo equilátero de lados medindo $18\ cm$.

Solução: Na figura ao lado, seja a o apótema, r o raio e h a altura do triângulo, então;



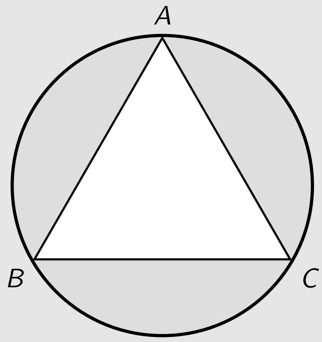
$$\left.\begin{array}{rcl} h & = & a+r \\ 18^2 & = & h^2+9^2 \end{array}\right\} \Rightarrow h=\sqrt{324-81}=\sqrt{243}=9\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} r^2 & = & 9^2+(h-r)^2 \\ & = & 81+h^2-2\cdot h\cdot r+r^2 \\ & = & 81+243-2\cdot 9\sqrt{3}\cdot r+r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow r=6\sqrt{3}$$

Portanto, a área do círculo é dada por $A_C=\pi\cdot r^2=108\pi\ cm^2$.

***ER* 4.50.** Um triângulo eqüilátero de perímetro igual a $18\ cm$ está inscrito em uma circunferência. Calcular a área da região externa ao triângulo que está dentro da circunferência.

Solução: A área da região é a área do círculo menos a área do triângulo.
Se a é o apótema, ré o raio e h é a altura do triângulo, então $h=a+r$
Assim:



$$\begin{array}{rcl} 6^2=h^2+3^2 & \Rightarrow & h=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3} \\ r^2=3^2+(h-r)^2 & \Rightarrow & r^2=9+27-2\cdot 3\sqrt{3}\cdot r+r^2 \\ r=2\sqrt{3} & & \end{array}$$

Área do círculo = $\pi\cdot r^2=12\pi\ cm^2$.
Área do triângulo = $6\cdot\frac{h}{2}=6\cdot 3\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}\ cm^2$.
Área do círculo - Área do triângulo = $(12\pi-9\sqrt{3})\ cm^2$.

4.3.2 Área do Setor Circular

Notemos que a área do setor pode ser calculada por uma regra de três simples:

1. Área de um setor circular de raio r e α radianos

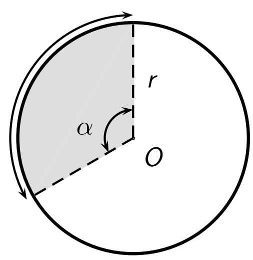
$$\left.\begin{array}{ccc} 2\pi rad & \text{———} & \pi r^2 \\ \alpha rad & \text{———} & A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor}=\frac{\alpha r^2}{2}}$$

2. Área de um setor circular de raio r e α graus

$$\left.\begin{array}{ccc} 360^\circ & \text{———} & \pi r^2 \\ \alpha^\circ & \text{———} & A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor}=\frac{\pi r^2\alpha}{360}}$$

3. Área de um setor circular em função do raio r e do comprimento ℓ do arco

$$\left.\begin{array}{ccc} 2\pi r & \text{———} & \pi r^2 \\ \ell & \text{———} & A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor}=\frac{\ell r}{2}}$$



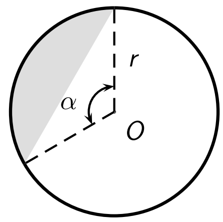
4.3.3 Área do Segmento Circular

4.12 Proposição. A área do segmento circular de um círculo de raio r, em que α é a medida do ângulo central e ℓ é o comprimento do arco é dado por:

$$A_{segm} = \frac{r^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha).$$

Prova: Seja α com medida em radianos.

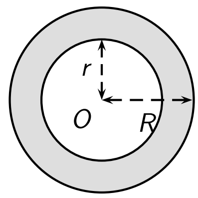
$$\begin{aligned} A_{segm} &= A_{setOAB} - A_{\triangle OAB} = \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ &= \frac{r^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \qquad \square \end{aligned}$$



4.13 Proposição. A área da coroa circular determinada por duas circunferências de raios medindo R e r é dada por:

$$A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2), \qquad R > r.$$

Prova: $A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$. $\square$



4.3.4 Exercícios

***EP* 4.51.** Qual a área de um círculo sabendo que o comprimento de sua circunferência é igual a $8\pi\ cm$?

***EP* 4.52.** Calcular a área de um setor circular de raio r e ângulo central medindo:

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $90°$ (e) $120°$ (f) $135°$ (g) $150°$ (h) $180°$

***EP* 4.53.** Calcular a área de um segmento circular de um círculo de raio R e ângulo central medindo:

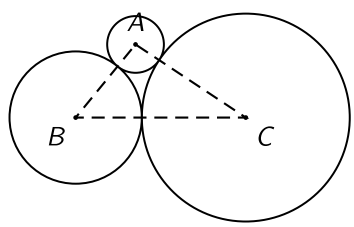
(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $90°$ (e) $120°$ (f) $135°$ (g) $150°$ (h) $180°$

***EP* 4.54.** Qual a área da coroa determinada pelas circunferências concêntricas de raios $15\ cm$ e $12\ cm$?

***EP* 4.55.** Determine a razão entre as áreas dos círculos circunscrito e inscrito num quadrado de lado a.

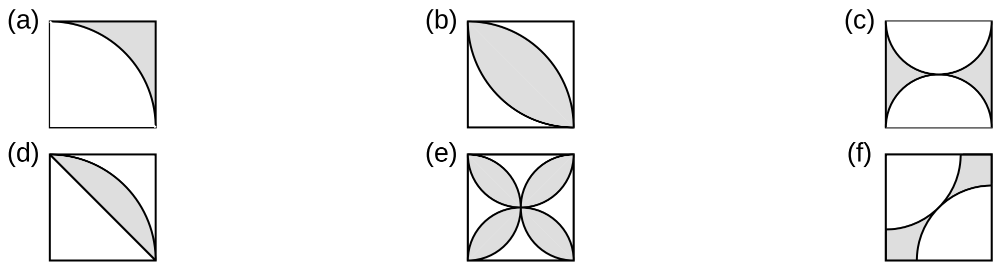
***EP* 4.56.** Unindo-se um ponto qualquer P de uma semi-circunferência às extremidades do diâmetro obtemos um triângulo retângulo de catetos iguais a $9\ cm$ e $12\ cm$, respectivamente. Determinar a razão entre a área do círculo e a área do triângulo retângulo.

***EP* 4.57.** Os pontos A, B e C são centros dos três círculos tangentes exteriormente como na figura ao lado. Sendo $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{AC} = 14\ cm$ e $\overline{BC} = 18\ cm$, determine as áreas desses três círculos.



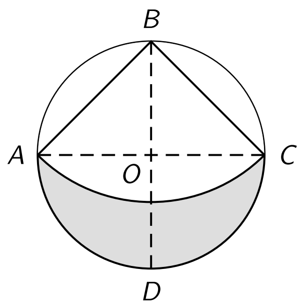
EP 4.58. Duas circunferências iguais de raio r, tangentes entre si, tangenciam internamente uma outra circunferência de raio $4r$. Calcular a menor das duas áreas limitadas por arcos das três circunferências.

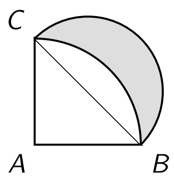
EP 4.59. Calcular a área da região sombreada, sabendo-se que o quadrado tem lado de medida a.



EP 4.60. Calcular a área da superfície limitada por seis círculos de raio r com centros nos vértices de um hexágono regular de lado 2.

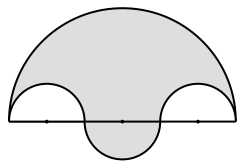
EP 4.61. Na figura ao lado, determine a área da parte sombreada em função do raio r do círculo, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ os lados de um quadrado inscrito nesse círculo.

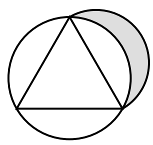




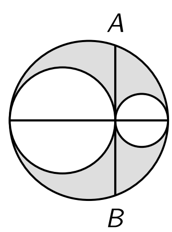
EP 4.62. Calcular a área da superfície sombreada sabendo que ABC é um triângulo retângulo isósceles de lado medindo a.

EP 4.63. Calcular a área da superfície sombreada sabendo que o diâmetro do semi-círculo maior mede a.

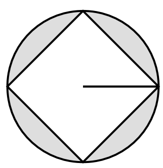




EP 4.64. Calcular a área da superfície sombreada sabendo que o comprimento do lado do triângulo equilátero é a.

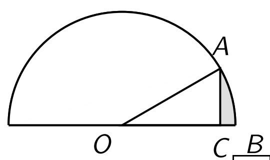


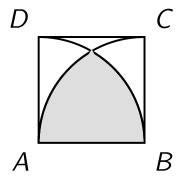
EP 4.65. Calcular a área da região sombreada sabendo que $\overline{AB} = t$ e que r é o raio do círculo maior.



EP 4.66. Calcular a área da região sombreada, sabendo-se que $ABCD$ é um quadrado e que a circunferência tem diâmetro igual a 4.

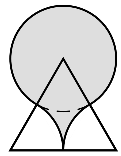
EP 4.67. Em um círculo de 20 m de diâmetro traça-se um ângulo central $A\hat{O}B$ de $30°$. Sendo $\overline{AC}$ a perpendicular baixada do ponto A sobre $\overline{OB}$, calcular a área da parte sombreada.

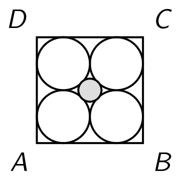




***EP* 4.68.** Calcular a área da parte sombreada, sabendo-se que $ABCD$ é um quadrado de lado a.

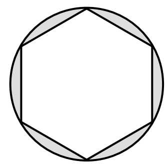
***EP* 4.69.** Calcular a área da região sombreada, sabendo-se que a circunferência da figura ao lado corta dois lados do triângulo equilátero, de lados medindo 6, nos seus respectivos pontos médios.

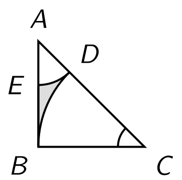




***EP* 4.70.** Calcular a área da região sombreada, sabendo-se que o quadrado $ABCD$ possui lado de comprimento ℓ.

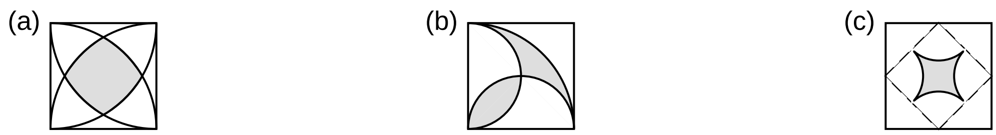
***EP* 4.71.** Na figura ao lado, o apótema do hexágono regular mede $5\sqrt{3}\ cm$. Determinar a área sombreada.





***EP* 4.72.** Determinar a área e o perímetro da figura BED, inscrita no triângulo retângulo ABC, sabendo que $\overline{AC}$ mede $10\ cm$, o ângulo $\hat{C}$ mede 45° e que os arcos BD e ED tem seus centros, respectivamente, nos pontos C e A.

***EP* 4.73.** Calcular a área da região sombreada, sabendo-se que o quadrado tem lado de medida a.



***EP* 4.74.** Determinar a área de um segmento circular de 60° de um círculo que contém um setor circular de $6\pi\ cm^2$ de área, sendo $2\pi\ cm$ o comprimento do arco desse setor.

***EP* 4.75.** Determinar a razão entre as áreas dos segmentos circulares em que fica dividido um círculo no qual se traça uma corda igual ao raio do círculo.

Gabarito

EP 4.51. $16\pi\ cm^2$. **EP** 4.52. (a) $\frac{\pi}{12}r^2$, (b) $\frac{\pi}{8}r^2$, (c) $\frac{\pi}{6}r^2$, (d) $\frac{\pi}{4}r^2$, (e) $\frac{\pi}{3}r^2$, (f) $\frac{3\pi}{8}r^2$, (g) $\frac{5\pi}{12}r^2$, (h) $\frac{\pi}{2}r^2$. **EP** 4.53. (a) $\frac{\pi-3}{12}r^2$, (b) $\frac{\pi-2\sqrt{2}}{8}r^2$, (c) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}r^2$, (d) $\frac{\pi-2}{4}r^2$, (e) $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}r^2$, (f) $\frac{3\pi-2\sqrt{2}}{8}r^2$, (g) $\frac{5\pi-3\sqrt{3}}{12}r^2$, (h) $\frac{\pi}{2}r^2$. **EP** 4.54. $81\pi\ cm^2$. **EP** 4.55. 2. **EP** 4.56. $\frac{26}{25}$. **EP** 4.57. $9\pi\ cm^2$, $49\pi\ cm^2$, $121\pi\ cm^2$. **EP** 4.58. $(5\pi-6\sqrt{3})\frac{r^2}{6}$. **EP** 4.59. (a) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$, (b) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$, (c) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$, (d) $\left(\frac{\pi-2}{4}\right)a^2$, (e) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$, (f) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$. **EP** 4.60. $2(3\sqrt{3}-\pi)$. **EP** 4.61. r^2. **EP** 4.62. $\frac{a^2}{2}$. **EP** 4.63. $\frac{\pi a^2}{9}$. **EP** 4.64. $\frac{\pi+6\sqrt{3}}{72}a^2$. **EP** 4.65. $\frac{\pi t^2}{8}$. **EP** 4.66. $4(\pi-2)$. **EP** 4.67. $\frac{25}{6}(2\pi-3\sqrt{3})$. **EP** 4.68. $\frac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{12}$. **EP** 4.69. $18(\pi+2\sqrt{3})$. **EP** 4.70. $\frac{(3-2\sqrt{2})}{16}a^2$. **EP** 4.71. $50(2\pi-3\sqrt{3})\ cm^2$. **EP** 4.72. $\frac{25}{2}[2+(\sqrt{2}-2)\pi]$ e $\frac{5}{2}[4(\sqrt{2}-1)+\pi]$. **EP** 4.73. (a) $\frac{3(1-\sqrt{3})+\pi}{3}a^2$ (b) $\frac{\pi-2}{4}a^2$ (c) $\frac{(4-\pi)}{8}a^2$. **EP** 4.74. $3(2\pi-3\sqrt{3})\ cm^2$. **EP** 4.75. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$.

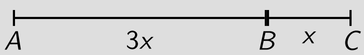
Atividade Orientada

Esta atividade consiste em avaliar o seu aprendizado na disciplina de Fundamentos de Geometria. As questões requerem um razoável conhecimento do assunto abordado. Sucesso!

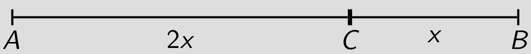
5.1 Etapa 1

***ER* 5.1.** Sabendo-se que A, B e C são pontos distintos de uma reta, que a medida de AB é igual ao triplo da medida de BC e $AC = 64\ cm$, determine as medidas dos segmentos AB e BC.

Solução: De fato, temos duas possibilidades para a disposição dos pontos: ABC ou ACB. Vejamos cada caso.

1. Chamemos x a medida de BC. Então, $AB = 3x$. Como $AC = AB + BC$ e $AC = 64\ cm$, temos que $3x + x = 64$. Logo, $4x = 64$ e, portanto, $x = 16\ cm$. Neste caso, $AB = 3x = 48$ e $BC = x = 16\ cm$.


2. Chamemos x a medida de BC. Como AB é o triplo de BC, $AB = 3x$. Mas, como C está entre A e B, então, $AC = AB - BC = 3x - x = 2x$. Sabemos que $AC = 64\ cm$. Então, $2x = 64\ cm$. Logo, $x = 32\ cm$. Assim, $AB = 3x = 96\ cm$ e $BC = x = 32\ cm$.



Agora é a sua vez!

O enunciado a seguir se refere às questões 5.1.1 e 5.1.2

Ana, Bia e Carla estão sentadas em um banco (alinhadas) na pracinha. Sabe-se que a distância entre Aninha e Bia é igual ao sêxtuplo da distância entre Bia e Carla, e a distância entre Ana e Carla é $70\ cm$.

5.1.1. Encontre as distâncias entre Ana e Bia, entre Bia e Carla, e a disposição delas no banco.

5.1.2. Suponha que Bia esteja entre Ana e Carla. Márcia e Naira, amigas das meninas, também querem bater um papo com elas. Márcia senta-se exatamente na metade do espaço existente entre Ana e Bia, e Naira na metade do espaço entre Bia e Carla. Sabendo-se que a distância entre Márcia e Naira é de $80\ cm$, encontre a distância entre Ana e Carla.

5.1.3. Sabendo que o suplemento de um ângulo x é igual a $180° - x$, encontre o ângulo tal que um quarto do seu suplemento vale $20°$.

5.1.4. Que horas marca o relógio cujo ponteiro dos minutos encontra-se apontando para o número 12 e cujo ângulo entre o ponteiro maior e o ponteiro menor é igual ao ângulo encontrado na questão anterior somado com $20°$?

5.1.5. O complemento de um ângulo x é igual a $90° - x$. Sabendo que o complemento da quarta parte de um ângulo excede o complemento desse ângulo em $60°$, determine o ângulo.

5.1.6. Cinco semi-retas partem de um mesmo ponto V, formando cinco ângulos que cobrem todo o plano e são proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6, ou seja, a soma dos ângulos formados pelas retas é igual a $360°$ e, além disso, se chamarmos de x, y, z w e t, os ângulos entre as retas, teremos $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{w}{5} = \frac{t}{6}$. Calcule o menor dos ângulos.

5.1.7. O perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos seus lados, por exemplo, se um triângulo tem lados de medidas x, y e z, então seu perímetro é igual a $x + y + z$. Determine o perímetro do triângulo ABC nos casos:

(a) Triângulo eqüilátero com $AB = x + 2y$, $AC = 2x - y$ e $BC = x + y + 3$. Lembre-se de que triângulo eqüilátero é aquele que tem os três lados de mesma medida;

(b) Triângulo isósceles de base BC com $AB = 2x + 3$, $AC = 3x - 3$ e $BC = x + 3$.

5.1.8. Mostre que o triângulo retângulo tem dois ângulos agudos (menores que $90°$). SUGESTÃO: Para essa demonstração, comece chamando de x, y e z os ângulos internos do triângulo. Depois, $x + y + z = 180°$. Faça agora uma análise das possibilidades de os ângulos serem agudos ou obtusos.

5.1.9. Se os lados de um triângulo são expressos por $2x + 20$, $4x + 8$ e $40 - 4x$, determine o intervalo de variação de x. SUGESTÃO: Lembre-se da desigualdade triangular.

5.1.10. O perímetro de um triângulo isósceles é a soma de x com y, onde (x, y) é solução do sistema

$$\begin{cases} x - y &= 5 \\ 2x - 3y &= -5 \end{cases} .$$

Sabe-se que a base mede $5\ cm$. Calcule as medidas dos outros dois lados. SUGESTÃO: Lembre-se de que um triângulo isósceles tem dois lados de mesma medida. Portanto, inicialmente encontre a solução do sistema para depois usar as informações sobre o triângulo.

5.2 Etapa 2

5.2.1. Mostre que dois triângulos eqüiláteros são semelhantes. SUGESTÃO: Para demonstrar o fato acima, lembre-se de que dois triângulos que possuem todos os ângulos correspondentes congruentes são semelhantes.

5.2.2. Mostre que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é k, então o perímetro de um é igual a k vezes o perímetro do outro. SUGESTÃO: Se a razão de semelhança entre dois triângulos é k, então, chamando de x, y e z, e a, b e c as medidas dos lados desses triângulos, temos que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$. Encontre o perímetro de cada triângulo e calcule a razão entre seus perímetros.

5.2.3. Um polígono regular possui o número de diagonais que possui um octógono menos 11. SUGESTÃO: Lembre-se de que o número de diagonais de um polígono regular de n lados é dado por $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, a soma dos ângulos internos, $S_i = 180° \cdot (n - 2)$ e a soma dos ângulos externos $S_e = 360°$. Sendo assim:

(a) Qual é o polígono?

(b) Qual é a soma dos ângulos internos do polígono?

(c) Qual é a soma dos ângulos externos?

5.2.4. Dois fazendeiros, João e Antônio, têm currais em formatos poligonais. O curral do João possui $n+1$ lados e o do Antônio possui $n-4$. A soma do número de diagonais dos dois currais poligonais é igual a 29. Determine a quantidade de lados de cada curral.

5.2.5. Sabe-se que o ângulo interno e o ângulo externo de um polígono regular são dados, respectivamente, pelas fórmulas $a_i = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ e $a_e = \dfrac{360^\circ}{n}$. Se a razão entre o ângulo interno e o ângulo externo de um certo polígono regular é 5,5, qual é seu número de lados?

5.2.6. Considere um trapézio isósceles cujos ângulos da base medem $2x - 15^\circ$ e $x + 25^\circ$. Determine os ângulos do trapézio.

5.2.7. A soma de dois ângulos opostos de um paralelogramo é igual a $\dfrac{5}{31}$ da soma dos outros dois ângulos opostos. Quais são os ângulos do paralelogramo? SUGESTÃO: Sabe-se que ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, e que a soma de dois ângulos adjacentes é igual a 180°.

5.2.8. A bissetriz de um ângulo obtuso do losango faz com um dos lados um ângulo de 47°. Qual é a medida dos ângulos agudos? SUGESTÃO: As bissetrizes dos ângulos internos de um losango são diagonais desse polígono!

5.2.9. Determine as medidas da base e da altura de um retângulo, sabendo que seu perímetro vale $576\ cm$ e que a base excede a altura em $8\ cm$.

Atividade Prática de Fundamentos de Geometria

Prezado(a) estudante,

Em Fundamentos de Geometria, você está tendo a oportunidade de estudar os conceitos de ponto, reta de plano.

REFLITA

Qual a sua concepção de ponto, de reta e de plano?

Você já ouviu falar desses conceitos como entes intuitivos?

Pra você, o que significa entes intuitivos?

Considerando o ponto, por exemplo, percebemos que ele não é concreto, não se pode pensar no ponto como um objeto.

EM SALA DE AULA

Se perguntarmos aos nossos alunos onde e quando se usa a palavra ponto, eles provavelmente vão citar como exemplo: o ponto de referência, o ponto da costura, o ponto de cozimento de uma comida, o ponto de exclamação, de interrogação, etc.

Fato semelhante acontece com a reta, com o segmento de reta, com o plano e com o ângulo. Objetos e coisas relacionadas ao nosso cotidiano são comumente citados como ilustração, uma vez que se aproximam desses conceitos geométricos: o encontro de duas paredes para dar exemplo de reta; a superfície de uma mesa para dar o exemplo de plano; os ponteiros do relógio para ilustrar exemplo de ângulos.

Porém, no ensino de Geometria, para efeito didático, é necessário identificar o ponto com uma letra maiúscula do alfabeto latino, a reta com uma letra minúscula e o plano com uma letra grega. No entanto, é de fundamental importância que possamos citar elementos relacionados com ambientes, a começar pela sala de aula.

$\sim \cdot \diamond \Diamond$ ***Para saber mais!*** $\Diamond \diamond \cdot \sim$

⋆ Só Matemática: Seu portal matemático

URL: <http://www.somatematica.com.br/cgi-bin/busca/ search.pl?lang=en&q =geometria+plana>

⋆ Aulas de Matemática

URL: <http://www.aulasdematematica.com.br/>

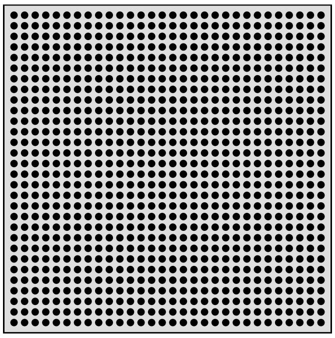
⋆ Conheça Euclides de Alexandria e sua Geometria:

URL: <http://www.numaboa.com.br/criptologia/historia/euclides.php>

Agora é com você:

Uma das nossas preocupações é que você adquira habilidades e competências para a sua práxis pedagógica, através da ampliação da compreensão do significado dos diversos conteúdos. Convidamos você a construir um GEOPLANO, recurso valioso para educadores que lançam mão de materiais concretos para a construção do conhecimento matemático. Vamos lá?!

1. Adquira uma tábua quadrada de "madeirite", com $30\ cm$ de lado.
2. Em seguida, trace com uma régua e uma caneta sobre toda a sua superfície da tábua, uma malha quadriculada com um centímetro de distância de uma linha para outra.
3. Na seqüência, coloque pregos pequenos nos pontos de todas as últimas linhas laterais, formando uma espécie de cercado, conforme desenho abaixo.



4. Usando "borracha de dinheiro", você pode formar retas paralelas, retas concorrentes, retas perpendiculares, ângulos de várias medidas, etc.

***Nota* 18.** Procure explorar através desta atividade o máximo de demonstrações dos conteúdos vigentes. Acreditamos que você estará procurando sempre investigar, pesquisar e experimentar todas as possibilidades que podem lhe garantir uma aprendizagem eficiente e promissora para o seu exercício profissional de Educador Matemático.

∼ · ⋄ ♢ Para saber mais: GEOPLANO! ♢ ⋄ · ∼

URL: <http://mathematikos.psico.ufrgs.br/textos/geoplan.pdf>

URL: <http://revistaescola.abril.com.br/edicoes/0184/aberto/mt_82238.shtml>

5.3 Etapa 3

5.3.1. A base maior de um trapézio isósceles mede $50\ cm$ e a base menor $30\ cm$. Sendo $60°$ a medida de cada um dos seus ângulos agudos, determine a altura e o perímetro do trapézio.

5.3.2. Aninha estava andando pela rua, quando parou e observou um edifício, construído em um terreno plano, sob um ângulo de $60°$. Mais tarde ela se afastou do edifício mais $30\ m$, passando a vê-lo sob ângulo de $45°$. Calcule a altura do edifício.

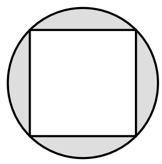
5.3.3. Verifique se existe um triângulo ABC tal que $BC = 10\ cm$, $AC = 1\ cm$ e $= 30°$. SUGESTÃO: Chame de x a medida do outro lado e utilize a Lei dos Cossenos. Em seguida, obterá uma equação do segundo grau. Veja se existe solução para tal equação.

5.3.4. Uma formiguinha está num praça cujo formato é um triângulo retângulo de hipotenusa medindo $5\ m$. Existe um jardim circular de raio $1\ m$, inscrito nessa praça. A formiguinha caminhou pelos três lados do triângulo, sem atravessar o jardim. Qual foi a distância percorrida por ela?

5.3.5. As medidas dos lados de um quadrilátero circunscrito a uma circunferência são $x + 1$, $2x$, $3x + 1$ e $3x$. Encontre o perímetro do quadrilátero.

5.3.6. Um quadrado e um losango têm o mesmo perímetro. Determine a razão entre a área do quadrado e do losango, sabendo que as diagonais do losango estão entre si assim como 3 está para 5 e que a diferença entre elas é igual a $40\ cm$. SUGESTÃO: Aqui vale lembrar que a área de um quadrado de lado x é calculada pela fórmula $A_q = x^2$, e a de um losango de diagonais d e D, $A_l = \dfrac{d \cdot D}{2}$.

5.3.7. Epitápio tem em seu sítio uma plantação de milho num terreno cuja forma é um quadrado, e uma plantação de feijão em torno da plantação de milho, de tal forma que a plantação total fique no formato circular. Sabendo-se que a área plantada de milho é igual a $81\ m^2$, calcule a área total da plantação. SUGESTÃO: encontre o raio do círculo e calcule a área do círculo.



5.3.8. Qual é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo que possui área igual a $49\ cm^2$ e cuja hipotenusa mede o dobro da altura relativa a ela. SUGESTÃO: Pode-se usar, para calcular a área de um triângulo de base b e de altura h, a fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

5.3.9. Determine a área de um triângulo retângulo isósceles, sabendo que sua hipotenusa é igual à oitava parte do perímetro de um quadrado inscrito em um círculo de raio $2\ cm$. SUGESTÃO: Lembre-se de que, num triângulo retângulo isósceles, os catetos podem ser vistos como a base e a altura, e que o lado de um quadrado inscrito em um círculo de raio r é igual a $x = r\sqrt{2}$.

Atividade Prática de Fundamentos de Geometria

Prezado(a) estudante,

As atividades práticas têm como propósito incentivá-lo à pesquisa e à investigação, objetivando a auto-suficiência na sua aprendizagem. Mais que isso, as atividades que aqui propomos pretendem prepará-lo para uma práxis pedagógica mais emocionante, mais envolvente, mais significativa aos seus futuros educandos, de modo a poder mostrar-lhes uma Matemática como ela é, útil, bela, essencial à vida humana.

A disciplina Geometria, nesse aspecto, é bastante proeminente para experimentações e demonstrações. E a História da Matemática, como já tratamos em disciplinas anteriores, pode trazer para sala de aula a compreensão desta íntima relação Ser Humano - Matemática.

Os seres humanos, no seu viver, produziram diversos conhecimentos para compreender e agir no seu universo. Um desses conhecimentos é a Matemática. E a diversidade de coisas neste universo produziu histórica e especificamente a Geometria.

Aqui, veremos um pouco a história do antigo Egito, cujas terras pertenciam ao Estado e era dividida para o cultivo entre os cidadãos.

"(...) A terra fértil era encontrada às margens do Rio Nilo, graças ao seu regime de cheias e vazantes anuais. Se por um lado as enchentes do Nilo propiciavam a fecundidade de suas margens, por outro criavam o problema das constantes demarcações da terra, já que a cheia destruía as marcas anteriores, e o Estado Egípcio precisava novamente redistribuir e remarcar as faixas de terra de cada família ou clã. A divisão era feita em faixas retangulares aproximadamente equivalentes. Outras maneiras de dividir a terra poderiam levar algumas propriedades a possuir muita terra fértil, enquanto algumas outras quase nenhumas ou nenhuma."

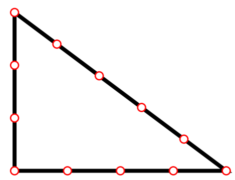
(Tenório, 1995, p. 12.)

Segundo Tenório, esta distribuição com o objetivo de maximizar a produção pode representar o desenvolvimento de uma técnica empírica de construções de ângulos retos, que, posteriormente, seria demonstrada pelo teorema de Pitágoras. De fácil construção, propomos a você a execução da prática egípcia, apresentada como ilustração por este autor.

ATIVIDADE:

1. Pegar uma corda e fazer treze nós eqüidistantes.

2. Construir com a corda um triângulo retângulo, fixando-a no primeiro e no quinto nó .
3. Fechar o triângulo, unindo o décimo-terceiro ao primeiro nó.
4. Fixar o terceiro vértice no oitavo nó, esticando bem os lados do triângulo.
   Você obterá um triângulo retângulo, cujo ângulo reto está no quinto nó.
   E, assim, você construirá o clássico triângulo 3, 4 e 5.



Ora, com este triângulo retângulo de lados com 3, 4 e 5 unidades de comprimento, os egípcios, fácil e seguramente, podiam demarcar suas terras, tendo a garantia de rapidez e precisão na demarcação.

Posteriormente, pelo teorema de Pitágoras, como foi demonstrado em aula, podemos facilmente equacionar esta prática egípcia da seguinte maneira:

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

$\sim \cdot \diamond \Diamond$ ***Para saber mais: GEOPLANO!*** $\Diamond \diamond \cdot \sim$

⋆ Veja a série proposta pelo programa Salto para o Futuro Geometria em questão

URL: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2001/gq/gq0.htm>

⋆ Conheça a Matemática das Pirâmides de Gisé e algumas sugestões para trabalhos interdisciplinares

URL: <http://www.expoente.com.br/professores/kalinke/projeto/piramide.htm>

Referências Bibliográficas

[1] DOLCE, Osvaldo& POMPEO, José Nicolau; **Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 09; Coleção Fundamentos da Matemática Elementar**. 7ª edição. São Paulo: Atual, 1.996.

[2] HOWARD, EVES; **História da Geometria: Série Tópicos da História da matemática para o uso em sala de aula**. 1ª edição. São Paulo: Atual, 1.994.

[3] BARBOSA, João Lucas Marques; **Geometria Euclidiana Plana: Coleção do Professor de Matemática**. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2.004.

[4] UMBERTO CÉSAR CHACON, MALANGA; **Livro de Matemática**. 1ª edição. São José dos Campos: Poliedro, 2.004.

[5] AABOE, Asger; **Episódios da História Antiga da Matemática**. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

[6] HOWARD, Eves; **Introdução à História da Matemática**. 1ª edição. Campinas: UNICAMP, 1.995.

[7] GONÇALVES JÚNIOR, Oscar; **Matemática por Assunto, Vol. 6**. 2ª edição. São Paulo: Scipione, 1.989.

[8] WAGNER, Eduardo; **Construções Geométricas. Coleção do Professor de Matemática**. 4ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2.001.

[9] LIMA, Elon Lages; **Medida e Forma em Geometria. Coleção do Professor de Matemática**. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 1.997.

FTC-EAD

FTC-EAD
Faculdade de Tecnologia e Ciências – Educação a Distância
Democratizando a educação.
www.ead.ftc.br

FTC
FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

ead
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

www.ead.ftc.br